ALJABAR LINEAR ELEMENTER

Diterbitkan atas bantuan penulisan buku
LPPM IAIN Padangsidimpuan tahun 2021

ALJABAR LINEAR ELEMENTER

Dr. Mariam Nasution, M.Pd.

KENCANA

ALJABAR LINEAR ELEMENTER
Edisi Pertama

ISBN 978-623-384-014-9
14,8 x 21 cm
xii, 98 hlm.

Cetakan ke-1, November 2021

Kencana. 2021.1543

Penulis
Dr. Mariam Nasution, M.Pd.

Diterbitkan oleh Kencana
Bekerja sama dengan IAIN Padangsidimpuan Press

Desain Sampul
Irfan Fahmi

Penata Letak
Rendy & Laily Kim

Penerbit
K E N C A N A
Jl. Tambra Raya No. 23 Rawamangun - Jakarta 13220
Telp: (021) 478-64657 Faks: (021) 475-4134

Divisi dari PRENADAMEDIA GROUP
e-mail: pmg@prenadamedia.com
www.prenadamedia.com
INDONESIA

Sambutan
Rektor Iain Padangsidimpuan

Bismillahirrahmanirrahim

Puji dan syukur dipanjatkan ke hadirat Allah Swt., berkat rahmat dan hidayah-Nya akhirnya penerbitan buku ajar dan buku referensi di lingkungan IAIN Padangsidimpuan dengan menggunakan anggaran tahun 2021 ini bisa diwujudkan. Hal ini bisa terlaksana berkat kerja sama pihak LPPM dengan para dosen dalam rangka menerbitkan buku-buku dosen IAIN Padangsidimpuan, baik itu berupa buku ajar, buku referensi, maupun buku bacaan.

Apresiasi yang tinggi untuk semua dosen yang telah menyumbangkan karya pikirnya bagi kemajuan dunia pendidikan dan kemajuan dunia ilmiah di IAIN Padangsidimpuan. Keberadaan buku ini diharapkan dapat menjadi informasi bagi para akademisi dan menjadi bahan bacaan bagi mahasiswa terhadap berbagai ranah keilmuan. Selain itu, juga diharapkan dapat menjadi bahan ajar bagi pada dosen dalam mengampu dan mengemban matakuliah yang dibebankan.

Penerbitan buku-buku karya dosen-dosen di lingkungan IAIN Padangsidimpuan dilakukan melalui kerja sama antara IAIN Padangsidimpuan Press dan Penerbit PrenadaMedia Group. Dengan adanya kerja sama yang dibangun melalui LPPM IAIN Padangsidimpuan, diharapkan penerbitan buku ini akan terus berlangsung setiap tahunnya. Terima kasih kepada LPPM yang telah melakukan gebrakan untuk kemajuan IAIN Padangsidimpuan melalui karya-karya ilmiah pada dosen.

Demikian disampaikan, besar harapan akan munculnya karya-karya dosen lainnya di IAIN Padangsidimpuan.

Rektor IAIN Padangsidimpuan

Prof. Dr. H. Ibrahim Siregar, MCL.

Kata Pengantar

Ketua LPPM IAIN Padangsidimpuan

Bismillahirrahmanirrahim

Puji dan syukur dihadirkan kepada Allah Swt., berkat rahmat dan hidayah-Nya penerbitan buku di lingkungan IAIN Padangsidimpuan akhirnya menjadi kenyataan. Tahun 2021 ini ada 16 judul buku yang diterbitkan dengan kerja sama IAIN Padangsidimpuan Press dan PrenadaMedia Grup, buku ini adalah salah satunya.

Ucapan terima kasih kepada penulis yang telah mendukung program LPPM dengan mengirimkan naskah terbaik yang dimilikinya. Tanpa kontribusi dari para dosen kegiatan ini tidak akan terlaksana. Terima kasih juga disampaikan kepada Pusat Penelitian dan Penerbitan yang telah memotivasi dan terus menggenjot para dosen untuk mengirimkan naskahnya, hingga akhirnya buku ini hadir di hadapan para pembaca. Keberadaan buku-buku ini hendaknya membawa manfaat yang signifikan, tidak saja bagi para dosen, tetapi juga para mahasiswa, yakni dengan tersedianya sumber belajar yang sesuai dengan keilmuan yang mereka tekuni.

Demikian disampaikan, semoga bisa tetap berkarya.

Ketua LPPM IAIN Padangsidimpuan

Dr. H. Zul Anwar Ajim Harahap, M.A.

Kata Pengantar

Puji dan syukur penulis ucapkan ke hadirat Allah Swt., atas segala limpahan rahmat dan kasih sayang-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penyusunan Buku Panduan Dosen pengembangan model pembelajaran berbasis masalah dan pemberian *reward* pada Matakuliah Aljabar Linear Elementer Program Studi/Tadris Pendidikan Matematika. Penyusanan buku panduan dosen ini diharapkan berguna untuk mencapai tujuan pembelajaran yang akan dicapai berdasarkan kompetensi dasar. Dalam Buku Panduan Dosen ini terdapat pembelajaran dengan langkah-langkah yang disusun bertujuan untuk meningkatkan kemampuan pemahaman konsep dan kemampuan memecahkan masalah yang berhubungan dengan aljabar linear elementer. Dalam hal penyusunan Buku Panduan Dosen ini berdasarkan model pembelajaran berbasis masalah dan pemberian *reward*, terdapat di dalamnya belajar secara mandiri dan kelompok serta mampu memuculkan aktivitas mahasiswa secara bertangung-jawab. Kegiatan pembelajaran yang dilakukan dalam model pembelajaran berbasis masalah ini yaitu merumuskan masalah, menganalisis masalah, merumuskan hipotesis, mengumpulkan data, menguji hipotesis dan memberi kesimpulan serta disetiap langkah yang dilakukan mahasiswa di berikan *reward*. Jenis pemberian *reward* yang diberikan kepada mahasiswa yaitu berbentuk *reward* jenis benda dan nonbenda. Pemberian *reward* ini bertujuan untuk merangsang motivasi, membangkitkan, minat dan mahasiswa merasa dihargai serta perhatikan atas usaha yang dilakukan setiap langkah pembelajaran yang diberikan. Pada akhirnya Buku Panduan Dosen ini berisi tentang peta capaian belajar, rencana pembelajaran satu semester, petunjuk pelaksanaan pengembangan model pembelajaran berbasis masalah dan pemberian *reward* pada matakuliah aljabar linear.

Akhirnya, besar harapan penulis semoga buku panduan dosen ini bermanfaat dan memberi informasi serta sumbangan pemikiran demi kelancaran proses pembelajaran.

Padang, 2021

Penulis

Mariam Nasution

Daftar Isi

BAB 1

Pendahuluan

A. RASIONAL

Filsafat kontruktivisme dewasa ini mempunyai pengaruh besar dalam dunia pendidikan. Berlandaskan pada teori ini, model pembelajaran sangat berbeda dengan model pembelajaran klasik. Dalam pendidikan, aliran konstruktivisme menghendaki agar peserta didik dapat menggunakan kemampuannya secara konstruktif untuk menyesuaikan diri dengan tuntutan perkembangan ilmu dan teknologi. Peserta didik harus aktif mengembangkan pengetahuan, tidak hanya menunggu arahan dan petunjuk dari guru/dosen. Aliran ini mengutamakan peran mahasiswa dalam berinisiatif. Konstruktivisme merupakan teori yang menolak bahwa anak-anak adalah lembaran putih yang kosong. Anak-anak tidak menyerap ide-ide yang diberikan gurunya, tetapi mereka adalah kreator pengetahuannya (Walle, 2008).

Penerapannya dalam proses pembelajaran, aliran konstruktivisme memberikan keleluasaan kepada mahasiswa untuk aktif membangun kebermaknaan sesuai dengan pemahaman yang telah mereka miliki, memerlukan serangkaian kesadaran akan makna bahwa pengetahuan tidak bersifat objektif atau stabil, tetapi bersifat temporer atau selalu berkembang tergantung pada persepsi subjektif individu dan individu yang berpengetahuan menginterpretasikan serta mengonstruksi suatu realisasi berdasarkan pengalaman dan interaksinya dengan lingkungan. Pengetahuan berguna jika mampu digunakan untuk memecahkan suatu permasalahan.

John Dewey menguatkan lagi teori konstruktivisme ini mengatakan bahwa pendidik yang cakap harus melaksanakan pengajaran dan pembelajaran sebagai proses menyusun atau membina pengalaman secara berterusan. Beliau juga menekankan kepentingan penyertaan murid di dalam setiap aktivitas pengajaran dan pembelajaran. Dalam kelas dengan model pembelajaran kontruktivisme peserta didik diberdayakan oleh latar belakang pengetahuanya yang berbeda-beda. Mereka berada dalam situasi berbagai penyelesaian dan diskusi, berpikir kritis tentang cara menyelesaikan yang terbaik dalam menyelesaikan soal. Terdapat beberapa prinsip dengan model kontruktivisme yaitu observasi, mendengar, aktivitas, pembicaraan matematika peserta didik merupakan acuan dan petunjuk dalam mengajar menyusun kurikulum dan untuk mengevaluasi pertumbuhan.

Berdasarkan penjelasan di atas bahwa teori kontruktivisme sangat cocok diimplementasikan seorang dosen dalam mendesain sebuah model pembelajaran. Model pembelajaran itu sendiri dapat memberikan ruang kepada mahasiswa agar terciptanya masyarakat belajar yang didalamnya tercipta berbagai kegiatan belajar. Model pembelajaran yang tepat dan sesuai dengan karakteristik mahasiswa dapat memberikan berbagai aktivitas dan pencapaian tujuan pembelajaran. Oleh karena itu dosen sebagai pembimbing sekaligus sebagai fasilitator yang menjadi pemeran utama dalam menjalankan model pembelajaran di kelas dan berupaya akan memberikan proses pembelajaran yang bermakna demi tercapainya suatu tujuan pembelajaran.

B. TUJUAN PEMBUATAN BUKU PANDUAN DOSEN

Penyajian buku ini berisikan petunjuk pelaksanaan perkuliahan pada matakuliah yang ditujukan untuk dosen pengampu matakuliah. Melalui buku panduan dosen ini, diharapkan dosen dapat meningkatkan mutu dosen melalui profesionalisme yang dapat memenuhi kepuasan stakeholders, memahami tugas dan melaksanakan perannya demi kelancaran penyelenggaraan pelaksanaan perkuliahan dapat berjalan dengan baik. Buku ini memberikan panduan kepada dosen dalam pelaksanaan perkuliahan, khususnya matakuliah aljabar linear elementer, sehingga dosen mempunyai sebuah panduan dan arahan dalam perkuliahan dengan menggunakan model pembelajaran berbasis masalah. Mudah-mudahan buku ini memberikan panduan bagi dosen dan dapat mengaplikasikan perkulihan sehingga proses pembelajaran matakuliah aljabar linear elementer dapat berjalan dengan baik. Sehingga pemaparan yang ada pada buku ini menjadi panduan bagi dosen tetap di lingkungan IAIN Padangsidimpuan yang ingin mengembangkan diri, memperbaiki kinerja dan menjadi panutan serta teladan bagi mahasiswa.

BAB 2

Rencana Pembelajaran Semester (RPS) Program Studi Pendidikan/ Tadris Matematika

Nama Matakuliah	: Aljabar Linear Elementer
Kode/SKS	: 2222301/3 SKS
Status Matakuliah	: Wajib
Bentuk Perkuliahan	: Kuliah
Jumlah Pertemuan	: 8 Mingggu
Semester	: III (tiga)
Alokasi Waktu	: 100 menit
Dosen Pengampu	: Mariam Nasution, M.P.d

A. DESKRIPSI SINGKAT MATAKULIAH

Matakuliah aljabar Linear elementer ini dimaksudkan untuk membekali mahasiswa agar mampu menjelaskan konsep SPL, konsep matriks, mengidentifikasi SPL homogen, menghitung hasil operasi yang berlaku pada matriks, menerapkan operasi matriks untuk penyelesaian SPL. Perkuliahan ini juga bertujuan untuk menganalisis hasil SPL, menjelaskan determinan, menghitung determinan secara reduksi, menghitung determinan secara ekspansi, menghitung determinan secara Gauss, mengidentifikasi sifat-sifat dari berbagai ukuran matriks, mengaitkan determinan dengan SPL sehingga mampu mengaitkan matakuliah ini dengan matakuliah yang lain. Kompetensi yang diharapkan agar mahasiswa dapat menghubungkan SPL dengan konsep vektor di R2 dan R3 serta menghubungkan dengan analisis vektor di R2 dan R3.

B. CAPAIAN PEMBELAJARAN

a. CP dan ST (Capaian Pembelajaran Sikap dan Tata Nilai)

1) Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
2) Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
3) Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.
4) Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.
5) Mempunyai karakter.

b. CPKU (Capaian Pembelajaran Keterampilan Umum)

1) Menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan/atau teknologi sesuai dengan bidang keahliannya.
2) Mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis terhadap informasi dan data.

c. CPKK (Capaian Pembelajaran Keterampilan Khusus)

1) Mampu mengambil keputusan yang tepat di bidang pendidikan matematika berdasarkan informasi dan data yang relevan.
2) Mampu memberikan petunjuk dalam memilih berbagai alternatif solusi masalah di bidang pendidikan matematika

secara mandiri dan kelompok.

3) Mampu bertanggung jawab terhadap pekerjaan sendiri di bidang pendidikan matematika.

d. CPPP (Capaian Pembelajaran Penguasaan Pengetahuan)

1) Menguasai konsep dan pola pikir matematika (aljabar, statistika, geometri, analisis, terapan) yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di pendidikan sekolah menengah pertama serta untuk studi lanjut.
2) Menguasai metodologi dan konsep-konsep matematika yang terkait dengan nilai-nilai matematika.

e. Capaian Pembelajaran Perkuliahan

a. Mahasiswa, mengetahui dan memahami ruang lingkup matakuliah dan prosedur pelaksanaan perkuliahaan.
b. Mahasiswa mampu. menjelaskan konsep dasar dan menyelesaikan sistim persamaan linear.
c. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep matriks dan menyelesaikan matriks.
d. Mahasiswa mampu memahami SPL dengan eliminasi Gaussian.
e. Mahasiswa mampu menyelesaikan persamaan dengan substitusi balik.
f. Mahasiswa mampu menyelesaikan persamaan homogen.
g. Mahasiswa mampu memahami konsep matriks dan menyelesaikan operasi matriks.
h. Mahasiswa mampu memahami sifat-sifat determinan.
i. Mahasiswa mampu mengidentifikasi sifat-sifat determinan dari berbagai ukuran matriks.
j. Mahasiswa mampu mengidentifikasi matriks dasar dan metode mencari A-1.

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Konsep sistem persamaan linier

2. Konsep matriks
3. Metode eliminasi gauss
4. Sistem persamaan linier
5. Operasi matriks
6. Operasi matriks untuk menyelesaikan persamaan linier
7. Analisis hasil penyelesaian sistem persamaan linier
8. Determinan
9. Fungsi suatu determinan

D. METODE PEMBELAJARAN

Model pembelajaran berbasis masalah yang digunakan pada matakuliah ini dengan skema pembelajaran sebagai berikut:

1. Mahasiswa menyampaikan materi atau rumusan masalah yang akan dibahas disetiap pertemuan dalam bentuk kelompok dengan menggunakan pengetahuan masing-masing untuk menyelesaikan masalah yang dikemukakan.
2. Selanjutnya mahasiswa secara kelompok membahas materi atau rumusan masalah dalam situasi ini mahasiswa dituntut untuk mampu memberikan penjelasan tentang permasalahan yang akan diungkapkan.
3. Dalam kegiatan ini dosen bertindak sebagai fasilitator serta pengarah jalannya diskusi agar proses pembelajaran dapat berjalan dengan sebaik mungkin. Selanjutnya dosen memberikan *reward* dalam tiap tahapan yang dilalui beberapa kelompok berdasarkan penilaian yang sudah ditentukan.
4. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk berdiskusi antar mahasiswa, antar kelompok yang memungkinkan mahasiswa membagi secara luas informasi yang ia miliki serta mencari solusi dari permasalahan yang dibahas sehingga terjadi pengalian pengetahuan dengan menggunakan cara berpikir kritis.
5. Dalam penyelesaian soal/masalah dalam aljabar linear maha-

siswa tidak hanya dituntut bagaimana ia bisa menyelesaikan masalah tersebut namun juga mahasiswa di tuntut untuk bisa mengembangkan/menunjukkan situasi lain dari soal yang ada.

6. Mengutamakan diskusi yang interaktif dan diskusi yang menyebar/melibatkan semua mahasiswa dalam kelas tersebut.

E. BENTUK PENUGASAN

1. Tugas individu
   Tugas individu berupa memberikan latihan-latihan soal dan dikumpulkan pada setiap pertemuan.
2. Tugas kelompok
   Tugas kelompok yaitu tugas mempelajari materi dan mempresentasikannya di depan kelas, tugas ini diberikan pada pertemuan kedua. Pada pertemuan ke tiga dan seterusnya, kelompok yang telah ditentukan menyampaikan materi yang dipelajari yang berkaitan dengan materi yang telah dibagikan pada setiap kelompok.

F. PENILAIAN

Berdasarkan aturan yang terdapat pada pedoman akademik tahun 2017 yang terdapat di IAIN Padangsidimpuan tentang standar penilaian tentang PBM, diberlakukan juga pada PBM matakuliah aljabar linear elementer, yang berhak untuk mengikuti ujian tengah semester (UTS) adalah mahasiswa yang mengikuti perkulihan (tatap muka) minimal 35 persen dan yang mengikuti ujian akhir semester (UAS) adalah mahasiswa yang mengikuti perkulihan (tatap muka) minimal 75 persen.

Bobot setiap tugas, ujian tengah semester (UTS) dan ujian akhir semester (UAS) memiliki persentase yang berbeda. Skor akhir yang diperoleh mahasiswa mengikuti formula:

Skor = Sikap (15%) + tugas terstruktur (15%)+ tugas mandiri (15%) + UTS 25% + UAS (30%)

Pendekatan penilaian yang digunakan berupa Penilaian Acuan Patokan (PAP). *Grade* nilai akhir matakuliah dikategorikan sebagai berikut:

Tabel 1. Penilaian Acuan Patokan (PAP) Grade Nilai Akhir Matakuliah Aljabar Linear Elementer

NO	SKOR	GRADE
1	80 – 100	A
2	70 - 79	B
3	60 – 69	C
4	50- 59	D
5	$\leq$ 49	E

Sumber Referensi

Anton, H. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga. 1995.

Ayres Jr. F. *Theory and Problems of Matrices*. New York: schaum. 1982.

Bill jacob. *Linier Algebra*. New York. Freeman Company. 1990.

K.A. Stroud. *Matematika Teknik*. Jakarta: Erlangga. 2002.

Supranto, J. *Pengantar Matrix*. Jakarta: LP-FEUI. 2007.

Soemartojo. N. dan Tapilouw Marthen. *Program Linear*. Jakarta: U.T 1999.

Siagian. P. Penelitian *Operasional Teori dan Praktik*. Jakarta: UI. Press. 1987.

Simangunsong, Wilson. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga. 2005.

R. Gunawan Santoso. *Aljabar Linear Dasar.* Yokjakarta: Andi. 2009.

Tabel 2. Rencana Kegiatan Pembelajaran Mingguan

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
1	1. Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.(CP-ST) 2. Mempunyai karakter yang berahlakqul karimah(CP-ST) 3. Menguasai konsep dan pola pikir matematika (aljabar, statistika, geometri, analisis, terapan) yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di pendidikan sekolah menengah pertama serta untuk studi lanjut.(CP-PP). 4. Mampu memberikan petunjuk dalam memilih berbagai alternatif dan solusi masalah bidang pendidikan matematika secara mandiri dan kelompok. (CP-KK).	1. Menunjuk-kan sikap religius 2. Mempunyai akhlak yang baik 3. Memiliki motivasi dan gambaran yang jelas mengenai materi yang dipelajari 4. Mahasiswa Mengetahui dan mema-hami ruang lingkup mataku-liah dan prosedur pelaksanaan perkuliahan	1. Mahasiswa mengetahui materi yang akan dibahas selama satu semester. 2. Mahasiswa mengetahui jumlah pertemuan yang akan dilaksana-kan dan jumlah pertemuan minimal yang akan di penuhi dalam perkuliahan aljabar linear ele-menter	Kontrak Kuliah	2 x 50 menit		Ceramah	1. Membuka perkuliahan dengan salam 2. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai 3. Melakukan apersepsi dan memotivasi mahasiswa untuk aktif dalam pembelajaran 4. Membuat kontrak perkuliahan dengan mahasiswa 5. Menjelaskan materi (pokok bahasan) yang akan dipelajari dalam 8 minggu 6. Memberi kesempatan pada mahasiswa yang akan bertanya atau memberi masukan kepada dosen tentang materi yang dipelajari dalam 8 minggu 7. Mengkondisikan mahasiswa dalam kelompok diskusi (1 kelompok 4 -5 orang). 8. Memberi tugas kepada mahasiswa untuk menyelesaikan soal-soal secara kelompok. 9. Berdoa bersama dalam menutup pembelajaran.	1. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai. 2. Memperhatikan dan mendengarkan penjelasan dosen tentang materi perkuliahan untuk 8 minggu 3. Membuat kontrak perkuliahan dengan dosen 4. Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi perkuliahan yang dipelajari 5. Bertanya atau mengemukakan pendapat terkait dengan materi pembelajaran. 6. Membentuk kelompok diskusi. 7. Berdoa bersama dalam menutup pembelajaran.	Keha-diran, aktivitas di kelas

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
2.	1. Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.(CP-ST) 2. Mempunyai karakter yang berakhlaqul karimah(CP-ST) 3. Menguasai konsep dan pola pikir matematika (aljabar, statistika, geometri, analisis, terapan) yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di pendidikan sekolah menengah pertama serta untuk studi lanjut.(CP-PP). 4. Mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis terhadap informasi dan data (CP-KU). 5. Mampu memberikan petunjuk dalam memilih berbagai alternatif dan solusi masalah bidang pendidikan matematika secara mandiri dan kelompok. (CP-KK)	1. Menunjukkan sikap religius. 2. Mempunyai akhlak yang baik. 3. Memiliki motivasi dan gambaran yang jelas mengenai materi yang dipelajari. 4. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep dasar SPL. 5. Mahasiswa mampu menyelesaikan SPL	1. Mahasiswa mampu membedakan yang termasuk persamaan linear dan yang bukan. 2. Mahasiswa mampu mengubah bentuk SPL ke dalam bentuk matriks yang diperbesar. 3. Mahasiswa mampu menyelesaikan SPL dalam bentuk m persamaan dan n peubah. 4. Mahasiswa mampu menggunakan metode dasar untuk menyelesaikan SPL.	Sistem Persamaan Linear	2x 50 menit	Hand out, LCD, papan tulis	Model pembelajaran berbasis masalah	**Fase 1** **Orientasi** 1. Membuka perkuliahan dengan salam 2. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai 3. Menyampaikan tujuan pembelajaran 4. Mengaitkan materi dengan pengetahuan sebelumnya. **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Melakukan apersepsi dan memotivasi mahasiswa untuk aktif dalam pembelajaran. 2. Meminta mahasiswa merumuskan masalah 3. Memberikan *reward* **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Memantau pelaksanaan diskusi dalam bentuk kelompok 2. Memantau Pekerjaan LKM 3. Memberikan *reward* **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Mengawasi kerja kelompok 2. Memberikan *reward*	**Fase 1** **Orientasi** 1. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai. 2. Mengidentifikasi persiapan untuk belajar. 3. Menyimak tujuan pembelajaran yang disampaikan **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Mahasiswa berdiskusi dalam bentuk kelompok 2. Mahasiswa bekerja sesuai dengan LKM **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Masing-masing kelompok merumuskan hipotesis. **Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Memeriksa data yang dikumpulkan 2. Mengolah data sesuai dengan soal yang diberikan. **Fase 6** **Mengujian hipotesis** 1. Menganalisis data hasil eksperimen. 2. Mengawasi tugas yang sedang dikerjakan. 3. Mengawasi kemajuan pekerjaan.	Kehadiran, tugas, aktivitas di kelas

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
								Fase 5 **Mengumpulkan data** 1. Meminta mahasiswa mencari, mengumpulkan dan menyajikan data yang dibutuhkan 2. Memberikan reward **Fase 6** **Mengujian hipotesis** 1. Meminta mahasiswa untuk menganalisis hasil data eksperimen. 2. Meminta mahasiswa untuk menjawab pertanyaan. 3. Membimbing setiap kelompok mahasiswa dalam pengolahan data untuk mendapatkan kesimpulan 4. Memberikan *reward* **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Membuat kesimpulan secara bersama oleh mahasiswa tentang materi perkuliahan yang disampaikan 2. Meminta salah satu mahasiswa/ kelompok untuk menyampaikan kesimpulan tentang materi yang dipelajari. 3. Melakukan refleksi tentang pembelajaran yang dilaksanakan 4. Memberikan reward 5. Berdoa bersama selesai pembelajaran	4. Mengevaluasi kemajuan. 5. Mengevaluasi kemajuan. 6. Menjawab pertanyaan. 7. Membuat kesimpulan **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Menyampaikan hasil pengumpulan data/ verifikasi/eksperimen. 2. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 3. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 4. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 5. Mengevaluasi hasil pekerjaan. 6. Menjelaskan tentang proses berpikir dan evaluasi yang dilakukan	

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
4.	1. Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.(CP-ST). 2. Mempunyai karakter yang berakhlaqul karimah (CP-ST). 3. Menguasai konsep dan pola pikir matematika (aljabar, statistika, geometri, analisis, terapan) yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di pendidikan sekolah menengah pertama serta untuk studi lanjut.(CP-PP). 4. Mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis terhadap informasi dan data (CP-KU).	1. Menunjukkan sikap religius 2. Mempunyai akhlak yang baik 3. Memiliki motivasi dan gambaran yang jelas mengenai materi yang dipelajari 4. Mahasiswa mampu memahami konsep SPL homogen (sistem persamaan linear homogen) 5. Mahasiswa mampu menyelesaikan SPL homogen 6. Mahasiswa mampu mengidentifikasi hasil SPL homogen dengan benar.	1. Mahasiswa mampu membuat contoh bentuk persamaan linear homogen 2. Mahasiswa terampil menggunakan langkah langkah dalam penyelesaian persamaan linear homogen 3. Mahasiswa Terampil membuktikan hasil penyelesaian persamaan linear homogen.	Sistem Linear Homogen	2 x 50 menit	Han-out, LCD, papan tulis	Model pembelajaran berbasis masalah	**Fase 1** **Orientasi** 1. Membuka perkuliahan dengan salam 2. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai 3. Menyampaikan tujuan pembelajaran 4. Mengaitkan materi eliminasi Gauss Jordan dengan persamaan linear homogen. **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Melakukan apersepsi dan memotivasi mahasiswa untuk aktif dalam pembelajaran 2. Meminta mahasiswa merumuskan masalah 3. Meminta mahasiswa memberikan jawaban dalam rumusan masalah 4. Memberikan *reward* **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Memantau pelaksanaan diskusi dalam bentuk kelompok 2. Memantau Pekerjaan LKM 3. Memberikan *reward* **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Mengawasi kerja kelompok 2. Memberikan *reward*	**Fase 1** **Orientasi** 1. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai. 2. Mengidentifikasi persiapan untuk belajar. **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Memperhatikan dan mendengarkan penjelasan dosen tentang materi perkuliahan yang dipelajari 2. Mahasiswa mempelajari masalah-masalah yang diajukan **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Mahasiswa berdiskusi dalam bentuk kelompok 2. Mahasiswa bekerja sesuai dengan LKM **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Masing-masing kelompok merumuskan hipotesis. **Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Memeriksa data yang dikumpulkan	Kehadiran, tugas, aktivitas di kelas

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
	5. Mampu memberikan petunjuk dalam memilih berbagai alternatif dan solusi masalah bidang pendidikan matematika secara mandiri dan kelompok. (CP-KK).		4. Mahasiswa terampil dalam mengidentifikasi sifat-sifat dalam persamaan linear Homogen					**Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Mengawasi kerja kelompok 2. Memberikan *reward* **Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Meminta mahasiswa mencari, mengumpulkan dan menyajikan data yang dibutuhkan 2. Memberikan *reward* **Fase 6** **Mengujian hipotesis** 1. Meminta mahasiswa untuk menganalisis hasil data eksperimen. 2. Meminta mahasiswa untuk menjawab pertanyaan. 3. Membimbing setiap kelompok mahasiswa dalam pengolahan data untuk mendapatkan kesimpulan 4. Memberikan *reward* **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Membuat kesimpulan secara bersama oleh mahasiswa tentang materi perkuliahan yang disampaikan 2. Meminta salah satu mahasiswa/kelompok untuk menyampaikan kesimpulan tentang materi yang dipelajari.	2. Mengolah data sesuai dengan soal yang diberikan **Fase 6** **Mengujian hipotesis** 1. Menganalisis data hasil eksperimen. 2. Mengawasi tugas yang sedang dikerjakan. 3. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 4. Mengevaluasi kemajuan. 5. Mengevaluasi kemajuan. 6. Menjawab pertanyaan. 7. Membuat kesimpulan. **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Menyampaikan hasil pengumpulan data/verifikasi/eksperimen. 2. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 3. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen. 4. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 5. Mengevaluasi hasil pekerjaan. 6. Menjelaskan tentang proses berpikir dan evaluasi yang dilakukan.	

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
								3. Melakukan refleksi tentang pembelajaran yang dilaksanakan 4. Memberikan *reward* 5. Berdoa bersama selesai pembelajaran		
5	1. Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius. (CP-ST) 2. Mempunyai karakter yang berakhlaqul karimah (CP-ST) 3. Menguasai konsep dan pola pikir matematika (aljabar, statistika, geometri, analisis, terapan) yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di pendidikan sekolah menengah pertama serta untuk studi lanjut.(CP-PP)4. 4. Mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis terhadap informasi dan data (CP-KU).	1. Menunjuk-kan sikap religius 2. Mempunyai akhlak yang baik 3. Memiliki motivasi dan gambaran yang jelas mengenai materi yang dipelajari 4. Mahasiswa mampu memaha-mi konsep matriks. 5. Mahasiswa mampu mengiden-tifikasi matriks me-nyelesaikan berbagai je-nis matriks.	1. Mahasiswa mampu menyebut-kan definisi matriks 2. Mahasiswa terampil meng-gunakan lambang-lambang yang berlaku dalam matriks 3. Mahasiswa terampil mengenali matriks baris dan matriks kolom 4. Mahasiswa terampil menghitung matriks dalam berbagai bentuk operasi	Matriks	2 x 50 menit	Han-out, LCD, papan tulis	Model pembel-ajaran berbasis masalah	**Fase 1** **Orientasi** 1. Membuka perkuliahan dengan salam 2. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai 3. Mengaitkan materi Matriks dengan sistem linera homogen **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Melakukan apersepsi dan memotivasi mahasiswa untuk aktif dalam pembelajaran 2. Meminta mahasiswa merumuskan masalah 3. Memberikan *reward* **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Memantau pelaksanaan diskusi dalam bentuk kelompok 2. Memantau Pekerjaan LKM 3. Memberikan *reward*	**Fase 1** **Orientasi** 1. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai. 2. Mengidentifikasi persiapan untuk belajar. **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Memperhatikan dan mendengarkan penjelasan dosen tentang materi perkuliahan yang dipelajari 2. Mahasiswa mempelajari masalah-masalah yang diajukan. **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Mahasiswa berdiskusi dalam bentuk kelompok 2. Mahasiswa bekerja sesuai dengan LKM **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Masing-masing kelompok merumuskan hipotesis.	Keha-diran, tugas, aktivitas di kelas

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
	5. Mampu memberikan petunjuk dalam memilih berbagai alternatif dan solusi masalah bidang pendidikan matematika secara mandiri dan kelompok. (CP-KK).							**Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Mengawasi kerja kelompok 2. Memberikan *reward* **Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Meminta mahasiswa mencari, mengumpulkan dan menyajikan data yang dibutuhkan 2. Memberikan *reward* **Fase 6** **Mengujian hipotesis** 1. Meminta mahasiswa untuk menganalisis hasil data eksperimen. 2. Meminta mahasiswa untuk menjawab pertanyaan. 3. Membimbing setiap kelompok mahasiswa dalam pengolahan data untuk mendapatkan kesimpulan 4. Memberikan *reward* **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Membuat kesimpulan secara bersama oleh mahasiswa tentang materi perkuliahan yang disampaikan 2. Meminta salah satu mahasiswa/ kelompok untuk menyampaikan kesimpulan tentang materi yang dipelajari.	**Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Memeriksa data yang dikumpulka 2. Mengolah data sesuai dengan soal yang diberikan **Fase 6** **Mengujian hipotesis** 1. Menganalisis data hasil eksperimen. 2. Mengawasi tugas yang sedang dikerjakan. 3. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 4. Mengevaluasi kemajuan. 5. Mengevaluasi kemajuan. 6. Menjawab pertanyaan. 7. Membuat kesimpulan **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Menyampaikan hasil pengumpulan data/ verifikasi/eksperimen 2. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 3. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 4. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 5. Mengevaluasi hasil pekerjan	

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
								3. Melakukan refleksi tentang pembelajaran yang dilaksanakan 4. Memberikan reward 5. Berdoa bersama selesai pembelajaran	6. Menjelaskan tentang proses berpikir dan evaluasi yang dilakukan	
6.	1. Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.(CP-ST) 2. Mempunyai karakter yang berakhlaqul karimah(CP-ST) 3. Menguasai konsep dan pola pikir matematika (aljabar, statistika, geometri, analisis, terapan) yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di pendidikan sekolah menengah pertama serta untuk studi lanjut.(CP-PP) 4. Mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis terhadap informasi dan data (CP-KU	1. Menunjuk-kan sikap religius 2. Mempunyai akhlak yang baik 3. Memiliki motivasi dan gambaran yang jelas mengenai materi yang dipelajari 4. mahasiswa mampu memahami konsep jenis dan operasi matriks 5. Mahasiswa mampu mengiden-tifikasi defenisi-de-fenisi pada matriks 6. Mahasiswa mampu menyelesai-kan berbagai jenis matriks	1. Mahasiswa mampu mengenal jenis-jenis matriks 2. Mahasiswa mampu memahami defenisi-defenisi dalam operasi matriks 3. Mahaiswa Terampil menghu-bungkan matriks dengan scalar 4. Mahasiswa terampil menyele-saikan operasi pada matriks	**Jenis dan Operasi Matriks**	2 x 50 menit	Han-out, LCD, papan tulis	Model pembel-ajaran berbasis masalah	**Fase 1** **Orientasi** 1. Membuka perkuliahan dengan salam 2. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai 3. Mengaitkan materi Jenis dan operasi matriks dengan materi matriks. **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Melakukan apersepsi dan memotivasi mahasiswa untuk aktif dalam pembelajaran 2. Meminta mahasiswa merumuskan masalah 3. Memberikan reward **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Memantau pelaksanaan diskusi dalam bentuk kelompok 2. Memantau Pekerjaan LKM 3. Memberikan reward **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Mengawasi kerja kelompok 2. Memberikan reward	**Fase 1** **Orientasi** 1. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai. 2. Mengidentifikasi persiapan untuk belajar. **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Memperhatikan dan mendengarkan penjelasan dosen tentang materi perkuliahan yang dipelajari 2. Mahasiswa mempelajari masalah-masalah yang diajukan **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Mahasiswa berdiskusi dalam bentuk kelompok 2. Mahasiswa bekerja sesuai dengan LKM **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Masing-masing kelompok merumuskan hipotesis.	Keha-diran, tugas, aktivitas di kelas

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
	5. Mampu memberikan petunjuk dalam memilih berbagai alternatif dan solusi masalah bidang pendidikan matematika secara mandiri dan kelompok. (CP-KK)							**Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Meminta mahasiswa mencari, mengumpulkan dan menyajikan data yang dibutuhkan 2. Memberikan *reward* **Fase 6** **Mengujian hipotesis** 1. Meminta mahasiswa untuk menganalisis hasil data eksperimen. 2. Meminta mahasiswa untuk menjawab pertanyaan. 3. Membimbing setiap kelompok mahasiswa dalam pengolahan data untuk mendapatkan kesimpulan 4. Memberikan *reward* **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Membuat kesimpulan secara bersama oleh mahasiswa tentang materi perkuliahan yang disampaikan 2. Meminta salah satu mahasiswa/ kelompok untuk menyampaikan kesimpulan tentang materi yang dipelajari. 3. Melakukan refleksi tentang pembelajaran yang dilaksanakan 4. Memberikan *reward* 5. Berdoa bersama selesai pembelajaran.	**Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Memeriksa data yang dikumpulkan 2. Mengolah data sesuai dengan soal yang diberikan **Fase 6** **Mengujian hipotesis** 1. Menganalisis data hasil eksperimen. 2. Mengawasi tugas yang sedang dikerjakan. 3. Mengawasi kemajuan pekerjaan 4. Mengevaluasi kemajuan. 5. Mengevaluasi kemajuan. 6. Menjawab pertanyaan. 7. Membuat kesimpulan **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Menyampaikan hasil pengumpulan data/ verifikasi/eksperimen 2. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 3. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 4. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 5. Mengevaluasi hasil pekerjaan 6. Menjelaskan tentang proses berpikir dan evaluasi yang dilakukan	

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
7.	1. Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius. (CP-ST) 2. Mempunyai karakter yang berakhlaqul karimah(CP-ST 3. Menguasai konsep dan pola pikir matematika (aljabar, statistika, geometri, analisis, terapan) yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di pendidikan sekolah menengah pertama serta untuk studi lanjut.(CP-PP) 4. Mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis terhadap informasi dan data (CP-KU). 5. Mampu memberikan petunjuk dalam memilih berbagai alternatif dan solusi masalah bidang pendidikan matematika secara mandiri dan kelompok. (CP-KK)	1. Menunjukkan sikap religius 2. Mempunyai akhlaq yang baik 3. Memiliki motivasi dan gambaran yang jelas mengenai materi yang dipelajari 4. Mahasiswa mampu memahami konsep sifat sifat operasi matriks 5. Mahasiswa mampu menyelesaikan yang berhubungan dengan sifat-sifat operasi matriks	1. Mahasiswa mampu menjelaskan transfos dari suatu matriks 2. Mahasiswa mampu menjelaskan trace dari suatu matriks 3. Mahasiswa mampu mengidentifikasi teorema-teorema pada aturan aritmatika matriks 4. Mahasiswa mampu menjelaskan pangkat dari suatu matriks	Sifat-sifat operasi matriks	2 x 50 menit	Han-out, LCD, papan tulis	Model pembel-ajaran berbasis masalah	**Fase 1** **Orientasi** 1. Membuka perkuliahan dengan salam 2. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai 3. Mengaitkan materi sipat operasi matriks dengan dengan pengetahuan sebelumnya. **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Melakukan apersepsi dan memotivasi mahasiswa untuk aktif dalam pembelajaran 2. Meminta mahasiswa merumuskan masalah 3. Memberikan *reward* **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Memantau pelaksanaan diskusi dalam bentuk kelompok 2. Memantau Pekerjaan LKM 3. Memberikan *reward* **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Mengawasi kerja kelompok 2. Memberikan *reward* **Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Meminta mahasiswa mencari, mengumpulkan dan menyajikan data yang dibutuhkan 2. Memberikan *reward*	**Fase 1** **Orientasi** 1. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai. 2. Mengidentifikasi persiapan untuk belajar. **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Memperhatikan dan mendengarkan penjelasan dosen tentang materi perkuliahan yang dipelajari 2. Mahasiswa mempelajari masalah-masalah yang diajukan **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Mahasiswa berdiskusi dalam bentuk kelompok 2. Mahasiswa bekerja sesuai dengan LKM **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Masing-masing kelompok merumuskan hipotesis. **Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Memeriksa data yang dikumpulkan 2. Mengolah data sesuai dengan soal yang diberikan	Kehadiran, tugas, aktivitas di kelas

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
								Fase 6 **Mengujian hipotesis** 1. Meminta mahasiswa untuk menganalisis hasil data eksperimen. 2. Meminta mahasiswa untuk menjawab pertanyaan. 3. Membimbing setiap kelompok mahasiswa dalam pengolahan data untuk mendapatkan kesimpulan 4. Memberikan *reward* **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Membuat kesimpulan secara bersama oleh mahasiswa tentang materi perkuliahan yang disampaikan 2. Meminta salah satu mahasiswa/ kelompok untuk menyampaikan kesimpulan tentang materi yang dipelajari. 3. Melakukan refleksi tentang pembelajaran yang dilaksanakan 4. Memberikan *reward* 5. Berdoa bersama selesai pembelajaran	**Fase 6** **Mengujian Hipotesis** 1. Menganalisis data hasil eksperimen. 2. Mengawasi tugas yang sedang dikerjakan. 3. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 4. Mengevaluasi kemajuan 5. Menjawab pertanyaan. 6. Membuat kesimpulan **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Menyampaikan hasil pengumpulan data/ verifikasi/eksperimen 2. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 3. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 4. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 5. Mengevaluasi hasil pekerjaan 6. Menjelaskan tentang proses berpikir dan evaluasi yang dilakukan	

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
8.	1. Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius. (CP-ST) 2. Mempunyai karakter yang berakhlaqul karimah (CP-ST) 3. Menguasai konsep dan pola pikir matematika (aljabar, statistika, geometri, analisis, terapan) yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di pendidikan sekolah menengah pertama serta untuk studi lanjut.(CP-PP) 4. Mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis terhadap informasi dan data (CP-KU). 5. Mampu memberikan petunjuk dalam memilih berbagai alternatif dan solusi masalah bidang pendidikan matematika secara mandiri dan kelompok. (CP-KK)	1. Menunjukkan sikap religius 2. Mempunyai akhlaq yang baik 3. Memiliki motivasi dan gambaran yang jelas mengenai materi yang dipelajari 4. Mahasiswa mampu memahami konsep metode mencari A-1 dengan menggunakan matriks elementer. 5. Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan mencari A-1 dengan menggunakan matriks elementer	1. Mahasiswa mampu mengidentifikasi SPL dalam bentuk beberapa persamaan 2. Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian A-1 dari suatu matriks 3. Mahasiswa mampu menjelaskan matriks elementer 4. Mahasiswa mampu menjelaskan matriks identitas	Mencari A-1 dengan menggunakan Matriks Elementer	2 x 50 menit	Hand-out, LCD, papan tulis	Model pembelajaran berbasis masalah	**Fase 1** **Orientasi** 1. Membuka perkuliahan dengan salam 2. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai 3. Mengaitkan materi mencari A -1 dengan pengetahuan sebelumnya dengan materi dengan sipat siopat operasi matriks **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Melakukan apersepsi dan memotivasi mahasiswa untuk aktif dalam pembelajaran 2. Meminta mahasiswa merumuskan masalah 3. Memberikan *reward* **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Memantau pelaksanaan diskusi dalam bentuk kelompok 2. Memantau Pekerjaan LKM 3. Memberikan *reward* **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Mengawasi kerja kelompok 2. Memberikan *reward* **Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Meminta mahasiswa mencari, mengumpulkan dan menyajikan data yang dibutuhkan 2. Memberikan *reward*	**Fase 1** **Orientasi** 1. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai. 2. Mengidentifikasi persiapan untuk belajar. **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Memperhatikan dan mendengarkan penjelasan dosen tentang materi perkuliahan yang dipelajari 2. Mahasiswa mempelajari masalah-masalah yang diajukan **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Mahasiswa berdiskusi dalam bentuk kelompok 2. Mahasiswa bekerja sesuai dengan LKM **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Masing-masing kelompok merumuskan hipotesis. **Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Memeriksa data yang dikumpulkan 2. Mengolah data sesuai dengan soal yang diberikan	Kehadiran, aktivitas di kelas

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
								Fase 6 **Mengujian hipotesis** 1. Meminta mahasiswa untuk menganalisis hasil data eksperimen. 2. Meminta mahasiswa untuk menjawab pertanyaan. 3. Membimbing setiap kelompok mahasiswa dalam pengolahan data untuk mendapatkan kesimpulan 4. Memberikan *reward* **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Membuat kesimpulan secara bersama oleh mahasiswa tentang materi perkuliahan yang disampaikan 2. Meminta salah satu mahasiswa/ kelompok untuk menyampaikan kesimpulan tentang materi yang dipelajari. 3. Melakukan refleksi tentang pembelajaran yang dilaksanakan 4. Memberikan *reward* 5. Berdoa bersama selesai pembelajaran	**Fase 6** **Mengujian hipotesis** 1. Menganalisis data hasil eksperimen. 2. Mengawasi tugas yang sedang dikerjakan. 3. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 4. Mengevaluasi kemajuan. 5. Menjawab pertanyaan. 6. Membuat kesimpulan **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Menyampaikan hasil pengumpulan data/ verifikasi/eksperimen. 2. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 3. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 4. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 5. Mengevaluasi hasil pekerjaan. 6. Menjelaskan tentang proses berpikir dan evaluasi yang dilakukan	

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
9.	1. Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius. (CP-ST) 2. Mempunyai karakter yang berakhlaqul karimah(CP-ST) 3. Menguasai konsep dan pola pikir matematika (aljabar, statistika, geometri, analisis, terapan) yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di pendidikan sekolah menengah pertama serta untuk studi lanjut.(CP-PP) 4. Mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis terhadap informasi dan data (CP-KU). 5. Mampu memberikan petunjuk dalam memilih berbagai alternatif dan solusi masalah bidang pendidikan matematika secara mandiri dan kelompok. (CP-KK)	1. Menunjukkan sikap religius 2. Mempunyai akhlaq yang baik 3. Memiliki motivasi dan gambaran yang jelas mengenai materi yang dipelajari 4. Mahasiswa mampu mampu memahami konsep fungsi determinan. 5. Mahasiswa mampu mampu menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan Fungsi determinan	1. Mahasiswa mampu menjelaskan Fungsi determinan 2. Mahasiswa mampu menjelaskan inversi dari suatu matriks 3. Mahasiswa mampu menjelaskan permutasi dari bilangan bulat 4. Mahasiswa mampu menjelaskan hasil kali matriks	Fungsi determinan	2 x 50 menit	Hand-out, LCD, papan tulis	Model pembelajaran berbasis masalah	**Fase 1** **Orientasi** 1. Membuka perkuliahan dengan salam 2. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai 3. Mengaitkan materi fungsi determinan dengan pengetahuan sebelumnya, yaitu A-1 **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Melakukan apersepsi dan memotivasi mahasiswa untuk aktif dalam pembelajaran 2. Meminta mahasiswa merumuskan masalah 3. Memberikan *reward* **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Memantau pelaksanaan diskusi dalam bentuk kelompok 2. Memantau Pekerjaan LKM 3. Memberikan *reward* **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Mengawasi kerja kelompok 2. Memberikan *reward* **Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Meminta mahasiswa mencari, mengumpulkan dan menyajikan data yang dibutuhkan 2. Memberikan *reward*	**Fase 1** **Orientasi** 1. Melakukan doa bersama sebelum perkuliahan dimulai. 2. Mengidentifikasi persiapan untuk belajar. **Fase 2** **Merumuskan masalah** 1. Memperhatikan dan mendengarkan penjelasan dosen tentang materi perkuliahan yang dipelajari 2. Mahasiswa mempelajari masalah-masalah yang diajukan **Fase 3** **Menganalisis masalah** 1. Mahasiswa berdiskusi dalam bentuk kelompok 2. Mahasiswa bekerja sesuai dengan LKM **Fase 4** **Merumuskan hipotesis** 1. Masing-masing kelompok merumuskan hipotesis. **Fase 5** **Mengumpulkan data** 1. Memeriksa data yang dikumpulkan 2. Mengolah data sesuai dengan soal yang diberikan	Kehadiran, tugas, aktivitas di kelas

	Capaian Pembelajaran Prodi	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Indikator	Materi Ajar	Waktu	Media	Metode	Aktivitas		Evaluasi
								Dosen	Mahasiswa	
								Fase 6 **Mengujian hipotesis** 1. Meminta mahasiswa untuk menganalisis hasil data eksperimen. 2. Meminta mahasiswa untuk menjawab pertanyaan. 3. Membimbing setiap kelompok mahasiswa dalam pengolahan data untuk mendapatkan kesimpulan 4. Memberikan reward **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Membuat kesimpulan secara bersama oleh mahasiswa tentang materi perkuliahan yang disampaikan 2. Meminta salah satu mahasiswa/ kelompok untuk menyampaikan kesimpulan tentang materi yang dipelajari. 3. Melakukan refleksi tentang pembelajaran yang dilaksanakan 4. Memberikan reward 5. Doa bersama dalam menutup pembelajaran.	**Fase 6** **Mengujian hipotesis** 1. Menganalisis data hasil eksperimen. 2. Mengawasi tugas yang sedang dikerjakan. 3. Mengevaluasi kemajuan. 4. Mengevaluasi kemajuan. 5. Menjawab pertanyaan. 6. Membuat kesimpulan **Fase 7** **Kesimpulan** 1. Menyampaikan hasil pengumpulan data/ verifikasi/eksperimen 2. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 3. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen 4. Mengawasi kemajuan pekerjaan. 5. Mengevaluasi hasil pekerjaan. 6. Menjelaskan tentang proses berpikir dan evaluasi yang dilakukan	

Ketua Program Studi Pendidikan Matematika

Suparni, S. Si., M. Pd.

Padangsidimpuan, 2021 Dosen Pengampu

Mariam Nasution, M.Pd.

BAB 3

Tahap Pelaksanaan Model Pembelajaran Berbasis Masalah dan Pemberian Reward

A. PELAKSANAAN MODEL PEMBELAJARAN BERBASIS MASALAH

Tabel 3. Sintak Model Pembelajaran Berbasis Masalah Matakuliah Aljabar Linear Elementer (MPBMA)

Sintak	Peran Dosen	Peran Mahasiswa	Teknik Asesmen
Fase 1 Meru-muskan Masalah	▪ Mengaitkan materi dengan pengetahuan sebelumnya. ▪ Memotivasi mahasiswa ▪ Mengajukan pertanyaan untuk mengetahui prasyarat yang sudah dikuasai mahasiswa. ▪ Membagikan LKM eksperimen berbasis masalah terpimpin ▪ Menjelaskan tujuan pembelajaran	▪ Mengidentifikasi persiapan untuk belajar. ▪ Melakukan persiapan yang diperlukan dalam belajar. ▪ Duduk dalam kelompok yang sudah ditentukan. ▪ Mempelajari LKM ▪ Menunjuk ketua kelompok yang akan memimpin kegiatan	Observasi

	▪ Membagi mahasiswa dalam kelompok kecil beranggota 4-5 orang. ▪ Meminta mahasiswa membaca informasi singkat pada LKM dan menjawab singkat LKM eksperimen berbasis masalah ▪ Meminta mahasiswa melakukan kegiatan eksperimen. ▪ Meminta mahasiswa merumuskan masalah ▪ Memberikan *reward*	▪ kelompok masing-masing mempelajari masalah-masalah yang diajukan dalam LKM. ▪ Melakukan kegiatan eksperimen. ▪ Mengawasi tugas yang sedang dikerjakan. ▪ Mengawasi kemajuan pekerjaan. ▪ Mengevaluasi kemajuan	
Fase 2 Meng-analisis Masalah	▪ Memantau pelaksanaan diskusi dalam bentuk kelompok ▪ Memantau Pekerjaan LKM ▪ Memberikan *reward*	▪ Mahasiswa berdiskusi dalam bentuk kelompok ▪ Mahasiswa bekerja sesuai dengan LKM	Observasi
Fase 3 Meru-muskan Hipotesis	▪ Mengawasi kerja kelompok ▪ Memberikan *reward*	▪ Masing-masing kelompok merumuskan hipotesis	Observasi
Fase 4 Me-ngum-pulkan Data	▪ Meminta mahasiswa mencari, mengumpulkan dan menyajikan data yang dibutuhkan ▪ Memberikan *reward*	▪ Mengawasi tugas yang sedang dikerjakan. ▪ Mengawasi kemajuan pekerjaan. ▪ Mengevaluasi kemajuan.	Observasi
Fase 5 Peng-ujian Hipotesis	▪ Meminta mahasiswa untuk menganalisis hasil data eksperimen. ▪ Meminta mahasiswa untuk menjawab pertanyaan. ▪ Membimbing setiap kelompok mahasiswa dalam pengolahan data untuk mendapatkan kesimpulan ▪ Memberikan *reward*	▪ Menganalisis data hasil eksperimen. ▪ Mengawasi tugas yang sedang dikerjakan. ▪ Mengawasi kemajuan pekerjaan. ▪ Mengevaluasi kemajuan. ▪ Menjawab pertanyaan. ▪ Membuat kesimpulan	Observasi
Fase 6 Kesim-pulan	Meminta salah satu mahasiswa/ kelompok untuk menyampaikan hasil pengumpulan data/verifikasi/ eksperimen. Mengecek pemahaman mahasiswa dan melakukan konfirmasi terutama untuk konsep-konsep penting. Memberikan *reward*	Menyampaikan hasil pengumpulan data/verifikasi/ eksperimen. Menyimpulkan materi yang dipelajari dengan bimbingan dosen Mengawasi kemajuan pekerjaan. Mengevaluasi hasil pekerjaan. Menjelaskan tentang proses berpikir dan evaluasi yang dilakukan	Portofolio

B. MATERI PEMBELAJARAN ALJABAR LINEAR ELEMENTER

1. Sistem Persamaan Linear

Suatu garis pada bidang xy mempunyai bentuk persamaan;

$$\mathbf{a_1\,x + a_2\,y = b} \text{..........................}(1)$$

Di mana a_1, a_2, dan b merupakan konstanta real, dan a_1 dan a_2 tidak keduanya nol.

Secara umum didefinisikan persamaan linear (*linear equation*) dengan n variabel $x_1, x_2 \, . \, . \, , \, x_n$ sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk.

$$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + \,.\,.\,.\, + a_nx_n = b} \text{............}(2)$$

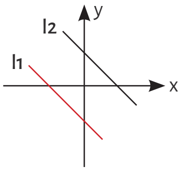
Suatu sistem sebarang dari *m* persamaan linear dengan *n* faktor yang tidak diketahui dapat ditulis sebagai:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \,.\,.\,.\, + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \,.\,.\,.\, + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \,.\,.\,.\, + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}$$

Suatu sistem persamaan linear terdiri dari *m* persamaan linear dengan *n* faktor yang tidak diketahui dapat disingkat dengan hanya menuliskan deretan bilangan-bilangan dalam jajaran empat persegi panjang.

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\
 & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix}$$

Ini disebut matriks yang diperbesar *(augmented matrix)* dari sistem tersebut.



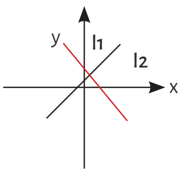
(a) tidak ada solusi

Linear dengan x dan y tidak diketahui berikut ini:

$a_1x + b_1y = c_1$ (a$_1$, b$_1$ tidak keduanya nol)

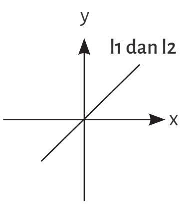
$a_2x + b_2y = c_2$ (a$_2$, b$_2$ tidak kedunya nol)

Grafik kedua persamaan ini merupakan garis lurus yang disebut l_1 dn l_2. Karena suatu titik (x,y) terletak pada garis tersebut jika dan hanya jika bilangan x dan yang memenuhi persamaan garis lurus tersebut, maka solusi-solusi dari sistem persamaan tersebut tiga kemungkinan yang diilustrasikan pada Gambar 1.



(b) tepat ada solusi

- Garis l_1 dan l_2 mungkin sejajar, yang berarti kedua garis tidak berpotongan dan sebagai konsekuensinya sistem tidak memiliki solusi.
- Garis l_1 dan l_2 mungkin berpotongan hanya pada 1 titik, yang berarti sistem hanya memiliki tepat satu solusi.
- Garis l_1 dan l_2 mungkin berimpitan, yang berarti jumlah titik potongnya tak terhingga dan sebagai konsekuensi terdapat tak terhingga banyaknya solusi untuk sistem tersebut.



(c) Tak terhingga banyaknya solusi

Gambar 1.

Ada tiga kemungkinan yang berlaku untuk sistem linear sebarang:

Setiap sistem persamaan linear dapat tidak memiliki solusi, memiliki tepat satu solusi, atau memiliki tak terhingga banyaknya solusi.

2. Eliminasi Gauss Jordan

Sistem persamaan linear

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ AX = b \end{array}\right\} \text{dinyatakan sebagai perkalian matriks}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \qquad \text{Berordo mxn}$$

Contoh 1. Matriks yang Diperbesar untuk Sistem Persamaan

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{array}$$

adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Metode dasar untuk menyelesaikan sistem persamaan linear adalah:

1. Mengalikan persamaan dengan konstanta tak nol
2. Menukarkan posisi dua persamaan
3. Menambahkan kelipatan satu persamaan ke persamaan lainnya.

Metode dasar menyelesaikan pada baris-baris matriks yang diperbesar:

1. Mengalikan baris dengan konstanta tak nol
2. Menukarkan posisi dua baris
3. Menambahkan kelipatan satu baris ke baris lainnya

Contoh 2. Eliminasi Gauss – Jordan

Selesaikan dengan menggunakan eliminasi Gauss – Jordan.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0 \\
2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1 \\
 & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & + & 15x_6 & & & = & 5 \\
2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18\,x_6 & = & 6
\end{array}
$$

Penyelesaian:

Matriks yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 6 & -5 & -2 & -2 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 10 & 15 & 5 \\
2 & 6 & 0 & 8 & 8 & 18 & 6
\end{bmatrix}
$$

$-2b_1 + b_2$ dan $-2b_1 + b_4$ diperoleh:

$$\downarrow$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6
\end{bmatrix}
$$

b_2 x-1 dan kemudian $-5b_2 + b_4$ diperoleh:

$$\downarrow$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6
\end{bmatrix}
$$

-4b2 + b4 diperoleh:

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

b3 di dipertukarkan ke b4 dan b3 x $\frac{1}{6}$ akan diperoleh bentuk eselon baris

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-3b_3 + b_2$ dan $2b_2 + b_1$ x 2 maka diperoleh bentuk eselon baris tereduksi.

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah:

$$\begin{aligned} x1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Persaman terakhir ditiadakan, $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_3\,0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$, kita akan memperoleh:

$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$
$x_3 = -2x_4$
$x_6 = \frac{1}{3}$

Jika menetapkan nilai sembarang *r, s,* dan *t* masing-masing untuk variabel-variabel bebes x_2 , x_4, dan x_5 maka solusi umumnya dinyatakan dalam rumus-rumus:

$$\mathbf{x_1 = -3}r - \mathbf{4}s - \mathbf{2}t, \quad \mathbf{x_3 = -2}s, \quad \mathbf{x_4} = s, \mathbf{x_5} = t, \quad \mathbf{x_6} = \frac{1}{3}$$

Contoh 3. Diselesaikan dengan Substitusi Balik

Bentuk eselon baris dari matriks yang diperbesar adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan sistem persaman yang bersesuaian

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Kita lakukan langkah-langkah berikut:

Langkah 1. Selesaikan persamaan-persamaan untuk variabel utama

$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$
$x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_6$
$x_6 = \frac{1}{3}$

Langkah 2. Dengan mensubstitusi $x_6 = \frac{1}{3}$ ke persamaan kedua, menghasilkan

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Dengan mensubstitusi $x_3 = -2x_4$ ke persamaan pertama menghasilkan

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Langkah 3. maka solusi umumnya dinyatakan dalam rumus-rumus berikut:

$x_1 = -3r - 4s - 2t$, $x_2 = r$, $x_3 = -2s$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, $x_6 = \frac{1}{3}$

CATATAN. Nilai-nilai sebarang yang ditetapkan untuk variabel-variabel bebas biasanya disebut ***parameter***.

Contoh 4. Eliminasi Gauss

Selesaikan

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss dan subtitusi balik,
Penyelesaian.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Menjadi bentuk eselon baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sistem yang bersesuaian dengan matriks tersebut adalah

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y + \frac{7}{2}z &= \frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan varibabel utama menghasilkan

$$\begin{aligned} x &= 9 - y - 2z \\ y &= -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}z \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Dengan menyubstitusikan persamaan paling bawah ke dalam persamaan-persamaan diatasnya, akan diperoleh

$x = 3 - y$
$y = 2$
$z = 3$

Dan menyubstitusikan persamaan kedua ke persaman di atasnya menghasilkan $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. ini cocok dengan hasil yang diperoleh melalui eliminasi Gausss-Jordan

Contoh lain subtitusi balik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan eliminasi gauss, maka dilakukan subtitusi balik, yaitu:

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$
$x_2 - 5x_3 = -9$
$x_3 = 2$

Persamaan yang bersesuaian:

$x_1 = 8 - x_2 - 2x3$
$x_2 = -9 + 5x_3$
$x_3 = 2$

Langkah I kita subtitusikan persamaan ketiga ke persamaan II menjadi

$x_1 = 8 - x_2 - 2x_3$
$x_2 = -9 + 5(2)$
$= 1$
$x_3 = 2$

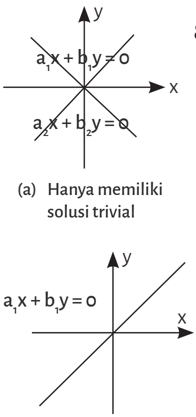
Langkah II kita subtitusikan persamaan II kepersamaan I menjadi

$x_1 = 8 - 1 - 2(2)$
$= 3$
$x_2 = 1$
$x_3 = 2$ jadi sesuai dengan contoh solusi di atas

3. Sistem Linear Homogen

Suatu sistem persamaan linear disebut **homogen** (*hoogeneous)* jika semua bentuk konstantanya adalah = 0; yaitu, sistem ini memiliki bentuk:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0$$



(a) Hanya memiliki solusi trivial

(b) Memiliki tak terhingga banyaknya

Gambar 2.

Setiap sistem persamaan linear homogen adalah konsisten serta solusi $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. solusi ini disebut **solusi trivial** (*trivial solution*); jika terdapat solusi lain, maka solusi-solusi tersebut disebut **solusi nontrivial** (*nontrivial solution*).

Karena sistem linear homogen selalu memiliki solusi trivial, maka hanya terdapat dua kemungkinan untuk solusi-solusinya:

- Sistem tersebut hanya memiliki solusi trivial
- Sistem tersebut memiliki tak terhingga banyaknya solusi selain solusi trivialnya

Pada kasus khusus di mana terdapat sistem linear homogen yang terdiri dari dua persaman dengan dua faktor yang tidak diketahui, misalnya:

$$a_1x + b_1y = 0 \qquad (a_1, b_1 \text{ tidak keduanya nol})$$
$$a_2x + b_2y = 0 \qquad (a_2, b_2 \text{ tidak kedunya nol})$$

Grafik dari persamaan-persaman ini adalah garis-garis yang melewati titik pusat dan solusi trivialnya bersesuaian dengan titik potong pada titik pusat (Gambar 2).

Contoh 5. Eliminasi Gauss – Jordan

Selesaikan sistem persaman linear homogen berikut dengan menggunan eliminasi Gauss-Jordan.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 + + x_5 &= 0 \\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

Matriks yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah:

$$
\begin{bmatrix}
2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\
1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

Dengan mereduksi matriks tersebut menjadi bentuk eselon baris, kita memperoleh

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \\
x_3 + x_5 &= 0 \\
x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Dengan menyelesaikan variabel-variabel utama kita memperoleh

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -x_2 - x_5 \\
x_3 &= - x_5 \\
x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Jadi, solusi umumnya adalah

$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$

Solusi trivial diperoleh jika $s = t = 0$ (tak trivial)

Contoh 6. Selesaikan persamaan homogen di bawah ini dengan system eliminasi Gauss Jordan.

$$
\begin{aligned}
v + 3w - 2x &= 0 \\
2u + v - 4w + 3x &= 0 \\
2u + 3v + 2w - x &= 0 \\
-4u - 3v + 5w - 4x &= 0
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

Persamaan di atas diubah kedalam matriks yang diperbesar, yaitu:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & -40 & 0 \end{bmatrix}
$$

b_1 ditukarkan ke b_2 diperoleh

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}
$$

b_1 x ½ diperoleh

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}
$$

-2b$_1$ + b$_3$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

4b$_1$ + b$_4$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-2b$_2$ + b$_3$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b$_2$ + b$_4$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

b$_3$ x -1/6 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

b_4 x -1/2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$2b_4 + b_2$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$-3/2b_3 + b_1$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$2b_3 + b_1$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$-3b_2 + b_2$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-1/2 $b_2 + b_1$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka di dapatkan matriks yang bersesuaian, yaitu:
x1 = 0, x2 = 0, x3 = 0, x4 = 0 yang merupakan **solosi trivial.**
Sebagai kesimpulan, kita memiliki teorema penting berikut:

Teorema 1
Suatu sistem persamaan linear homogen dengan jumlah faktor yang tidak diketahui lebih banyak dari jumlah persamaan, memiliki takterhingga banyaknya solusi.

4. Matriks dan Operasi Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat.

Contoh 1. Contoh Matriks

Beberapa contoh matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, [\,2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; -3\,], \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, [\,4\,]$$

Kita sebaiknya menggunakan huruf kapital untuk menyatakan matriks dan huruf kecil untuk menyatakan kuantitas numerik; jadi kita dapat menulis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ atau } C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Entri yang terletak pada bari *i* dan kolom *j* di dalam matriks A akan dinyatakan sebagai $a_{ij.}$ Jadi, matriks umum 3 x 4 dapat ditulis sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Dan matriks umum *m x n* sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notasi singkat matriks di atas dapat ditulis sebagai
$[a_{ij}]_{m \times n}$ atau $[\, a_{ij}\,]$
Entri pada bari *i* dan kolom *j* dalam matriks A juga biasa dinyatakan dengan simbol (A_{ij}). Jadi, untuk matriks (1) di atas, kita memiliki.

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

Dan untuk matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Kita memiliki $(A)_{11}$, = 2, $(A)_{12}$ = -3, $(A)_{21}$ = 7, dan $(A)_{22}$ = 0.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Jadi $(B)_{11}$= 0, $(B)_{12}$ = 3, $(B)_{13}$ = 6, $(B)_{21}$ = 1, $(B)_{22}$ = 4, $(B)_{23}$ = 7
$(B)_{31}$ = 2, $(B)_{32}$ = 5, $(B)_{33}$ = 8

Matriks bari umum a, 1 x *n* dan matriks kolom umum *b, m x 1* akan ditulis sebagai.

$$A = [\, a_1 \;\; a_2 \; \ldots \;\; a_n \,] \text{ dan } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

Suatu matriks A dengan jumlah baris *n* dan jumlah kolom *n* disebut **matriks bujursangkar ordo n** *(square matrix og order n)* dan entri $a_{11,}$ a_{22}, . . . a_{mn}, pada (2) yang diberik arsiran merukaan **diagonal utma** *main diagonal),* matriks A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Operasional pada Matriks,

> **Definisi**
> Dua matriks adalah setara (*equal*) jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah sama.

Dalam notasi matriks, jika A = $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka A = B jika dan hanya jika $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ untuk semua *i* dan *j*.

Contoh 2. Kesetaraan Matriks

Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix},\ B \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika x = 5, maka A = B, tetapi untuk semua nilai x yang lain matriks A dan B tidak setara, karena tidak semua entri keduanya yang bersesuian adalah sama. Tidak ada nilai untuk x di mana A = C, karena A dan C memiliki ukuran yang berbeda.

Definisi
Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka Jumlah (*sum*) A + B adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan Selisih (*difference*) A – B adalah matriks yang dieroleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pad B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka

Contoh 3. Penjumlahan dan Pengurangan

Perhatikan matriks-matriks.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 12 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Pernyataan A + C, B + C, A – C dan B – C tidak terdefinisi.

Definisi
Jika A adalah sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasilkalinya (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c. Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar **(***scalar multiple***)** dari A.

Contoh 4. Kelipatan Skalar

Untuk matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Kita memiliki

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix},\quad (-1)\,B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix},\quad \frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Merupakan hal yang biasa untuk menyatkan (-1) B sebagai –B.

Jika A_1, A_2, . . . A_n adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama dan c_1, c_2 . . . , c_n adalah skalar, maka pernyataan berbentuk $c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots . + c_nA_n$ disebut **kombinasi linear** (*linear combination*) dari A_1, A_2 . . . . A_n dengan **koefisien** (*coefficient*) c_1, c_2 . . . c_n, sebagai contoh, jika A, B, dan C adalah matriks-matriks pada contoh 4, maka:

$$2A - B + \frac{1}{3}C = 2A + (-1)B + \frac{1}{3}C$$

$$= 2A \quad + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

Adalah kombinasi linear dari A, B, dan C dengan koefisien-koefisien skalar 2, -1 dan $\frac{1}{3}$.

Jadi, kini kita telah mendefinisikan perkalian suatu matriks dengan suatu skalar tetapi bukan perkalian antara dua matriks.

Definisi
Jika A adalah matriks m x r dan B adah matriks r x n maka hasilkali (*Product* AB adalah matriks m x n yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dana kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Contoh. 5 Perkalian Matriks

Perhatikan matiks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

A dalah matriks 2 x 3 dan B adalah matriks 3 x 4, maka hasilkali adalah matriks 2 x 4

Perhitungan untuk hasilkali – hasilkalinya adalah

$$(1 . 4) + (2 . 0) + (4 . 2) = 12$$
$$(1 . 1) - (2 . 1) + (4 . 7) = 27$$
$$(1 . 4) + (2 . 3) + (4 . 5) = 30$$
$$(2 . 4) + (6 . 0) + (0 . 2) = 8$$

$$(2 \,.\, 1) - (6 \,.\, 1) + (0 \,.\, 7) = -4$$
$$(2 \,.\, 3) + (6 \,.\, 1) + (0 \,.\, 2) = 12$$

$$\begin{array}{ccc} A & B & AB \\ m \; x \; r & r \; x \; n & = m \; x \; n \end{array}$$

Dalam

Luar

Contoh 6. Menentukan Apakah Hasilkali dapat Didefinisikan

Misalkan A, B, dan C adalah matriks-matriks dengan ukuran sebagai berikut:

A	B	C
3 x 4	4 x 7	7 x 3

Maka sesuai dengan (3), AB dapat didefinisikan dan merupakan matriks 3 x 7 BC dapat didefinisikan dan merupakan matriks 4 x 3 dan CA dapat didefinisikan dan merupakan matriks 7 x 4, sementara hasilkali AC, CB, dan BA semua tidak dapat didefinisikan.

Secara umum, jika A = [a_{ij}] adalah matriks *m x r,* dan B = [b_{ij}] adalah matrik. *r x n* , maka sebagaimana dijelaskan dengan arsiran pada (4).

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{rl} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Entri $(AB)_{ij}$ ada baris *i* dan kolom *j* dari AB diperoleh melalui

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ir}b_{rj} \qquad (5)$$

Matriks yang Dipartisi

Sebuah matriks dapat dibagi atau **dipartisi** (*partitioned*) menjadi beberapa matriks yang lebih kecil dengn cara menyisipkan garis-garis horizontal dan vertikal di antara baris dan kolom yang diinginkan. Sebagai contoh, berikut ini tiga kemungkinan partisi A menjadi 4 **submatriks** (submatrix) A_{11}, A_{12}, A_{21}, dan A_{22}, kedua adalah partisi partisi a menjadi matriks-matriks baris r_1, r_2, dan r_3 dan ketiga adalah partisi A menjai matriks-matriks kolom c_1, c_2, c_3 dan c_4.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [\, c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \,]$$

Perkalian Matriks dengan Kolom dan Dengan Baris

Matrik kolom ke-j dari AB = A [matriks kolom ke-j dari B]

Matrik kolom ke-i dari AB = A [matriks kolom ke-i dari B]

Contoh 7. Peninjauan Kembali Contoh 5

Jika a dan B adalah matriks-matriks pada Contoh 5, dengan menggunakan (6) maka matriks kolom kedua dari AB dapat dicarai melalui perhitungan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Kolom} \\ \text{Kedua dari B}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{kolom} \\ \text{kedua dari AB}}}$$

Dan dari (7) matriks baris pertama dari AB dapat dicari melalui perhitungan

$$\underbrace{[1 \quad 2 \quad 4]}_{\text{Baris pertama dari A}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{[12 \quad 27 \quad 30 \quad 13]}_{\text{Baris pertama dari AB}}$$

Jika a_1, a_2, ... a_m menyatakan matriks-matriks baris dari A dan b_1, b_2, . . . b_n, menyatakan matriks-matriks kolom B, maka dari Rumus (6) dan (7) akan diperoleh

$$AB = A[b_1 \quad b_2 \; \ldots\ldots \; b_n] = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad \ldots\ldots \quad Ab_n] \qquad (8)$$

(AB dihitung kolom demi kolom)

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1B \\ a_2B \\ \vdots \\ a_mB \end{bmatrix} \qquad (9)$$

(AB dihitung baris demi baris)

Hasilkali Matriks sebagai Kombinasi Linear

Matriks baris dan matriks kolom memberikan cara berpikir alternatif mengenai perkalian matriks. Sebagai contoh, misalkan bahwa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{ml} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

Maka

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Contoh 8. Kombinasi Linear

Hasilkali matriks

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari matriks-matriks kolom

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} -1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Hasilkali matriks

$$[1\ \ -9\ \ -3]\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix} = [\,-16\quad -18\quad 35]$$

Dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari matriks-matriks baris.

$$1\,[\,-1\ \ 3\ \ 2] - 9\,[1\ \ 2\ \ -3]\ -3\ [\,2\ \ 1\ \ -2] = [\,-16\quad -18\quad 35]$$

Sesuai dengan (8) dan (10), bahwa matriks kolom ke-j dari suatu hasilkali AB adalah kombinasi linear dari matriks-matriks kolom A dengan koefisien-koefisien yang berasal dari kolom ke-j dari B.

Contoh 9. Kolom-kolom Hasilkali AB sebagai kombinasi linear

Pada contoh 5 kita telah menunjukkan bahwa

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 6 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 5 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12 & 27 & 30 & 13\\ 8 & -4 & 26 & 12\end{bmatrix}$$

Matriks-matriks kolom AB dapat dinyatkan sebagai kombinasi linear dari matriks-matriks kolom A sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}12\\ 8\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}27\\ -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk Matriks dari suatu Sistem Linear

Sistem yang terdiri dari *m* persaman linear dengan *n* faktor yang tidak diketahui berikut ini.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Dua matriks adalah setara jika dan hanya jika entri-entri yang bersesuaian adalah setara, maka dapat menukar *m* persamaan dalam sistem ini dengan persamaan matriks tunggal.

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_1 & +\dots+ & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\dots+ & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\dots+ & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks *m x 1* pada ruas kiri persamaan dapat ditulis sebagai hasilkali, sehingga kita memperoleh

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Jika menyebut matriks-matriks di atas masing-maisng sebagai A, x dan b, maka sistem asli yang terdiri dari *m* persaman dengan *n* faktor yang tidak diketahui telah digantikan dengan persamaan matriks tungggal berikut ini.

$$\mathbf{Ax = b}$$

Matriks A pada persamaan ini disebut ***Matriks Koefisien*** (*coefficient matric*) dari sistem tersebut. Matriks yang diperbesar dari sistem tersebut diperoleh dengan menggabungkan b ke A sebagai kolom terakhir, sehingga bentuk matriks yang diperbesar menjadi

$$[\ A\ I\ b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Transpos suatu Matriks.

Definisi
Jika A adalah matriks *m x n,* maka Transpos dari A (*transpos of A*), dinyatakan dengan AT, didefinisikan sebagai matriks *n x m* yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari AT adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari AT adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

Contoh 10. Beberapa Transpos

Berikut ini adalah beberapa contoh matriks dan transposnya.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},\ C = [\,1 \quad 3 \quad 5\,],\ D = [4],$$

$$E = \begin{bmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \; B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \; D^T = [4]$$

$$E^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa tidak hanya kolom-kolom AT yang merupakan baris-baris A, tetapi juga baris-baris dari AT adah kolom-kolom dari A. Jadi, entri pada baris *i* dan kolom *j* pada AT adalah entri pada baris *j* dan kolom *i* pada A, sehingga

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ij} \tag{11}$$

Perhatikan kebalikan dari subskripnya.

Pada kasus khusus di mana A adalah matriks bujursangkar, transpos dari A dapat diperoleh dengan saling mempertukarkan entri-entri yang posisinya simetrik terhadap diagonal utama. Pada (12) tampak bahwa AT dapat juga diperoleh dengan "mencerminkan" A terhadap diagonal utamanya.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Definisi
Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka Trace dari A (*trace of* A), yang dinyatakan sebagai tr(A), didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. Trace dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Contoh 11. Trace dari sebuah Matriks

Berikut ini contoh matriks dan *trace*-nya.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Tr\ A} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ $\qquad$ $\mathrm{tr\ B} = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \qquad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 14 & 20 & 26 \\ 16 & 22 & 30 \end{bmatrix}$$

Tr = a + e + I $\qquad$ **tr = 12 + 20 + 30 =62**

5. Fungsi Determinan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dapat dibalik jika *ad* – *bc* # 0. Pernyataan *ad* – *bc* begitu sering muncul dalam matematika sehingga mendapat sebutan ***determinan*** (*determinant*) dari matriks *A* dan dinyatakan sebagai det (*A*). dengan notasi ini rumus untuk A^{-1} yang diberikan pada teorema 2, adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Definisi
Permutasi dari himpunan bilangan bulat atau integer {1, 2, ...n} adalah susunan integer-integer ini menurut suatu aturan tanpa adanya penghilangan atau pengulangan.

Contoh 1. Permutasi dari Tiga Integer

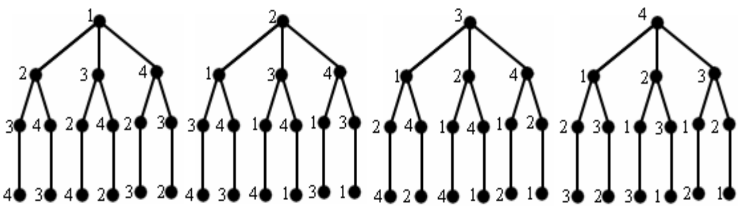
Untuk himpunan integer {1, 2, 3} terdapat 6 permutasi yang berbeda, yaitu:

(1, 2, 3)	(2, 1, 3)	(3, 1, 2)
(1, 3, 2)	(2, 3, 1)	(3, 2, 1)

Suatu metode yang paling mudah untuk menyusun daftar permutasi secara sistematis adalah dengan menggunakan pohon permutasi (*permutation tree*). Metode ini diilustrasikan pada contoh berikut.

Contoh 2. permutasi dari empat integer

Buatlah daftar semua permutasi dari himpunan integer {1, 2, 3, 4}.



Gambar 3.

Penyelesaian:
Melalui cara ini kita memperoleh daftar berikut ini.

(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(3, 1, 2, 4)	(4, 1, 2, 3)
(1, 2, 4, 3)	(2, 1, 4, 3)	(3, 1, 4, 2)	(4, 1, 3, 2)
(1, 3, 2, 4)	(2, 3, 1, 4)	(3, 2, 1, 4)	(4, 2, 1, 3)
(1, 3, 4, 2)	(2, 3, 4, 1)	(3, 2, 4, 1)	(4, 2, 3, 1)
(1, 4, 2, 3)	(2, 4, 1, 3)	(3, 4, 1, 2)	(4, 3, 1, 2)
(1, 4, 3, 2)	(2, 4, 3, 1)	(3, 4, 2, 1)	(4, 3, 2, 1)

Dari contoh ini kita lihat bahwa terdapat 24 permutasi untuk {1, 2, 3, 4}. Hasil ini sebenarnya dapat diantisipasi tanpa perlu menyusun daftar permutasinya secara umum, himpunan {1, 2,......n } akan memiliki $n(n-1)(n-2).....\ 2 \cdot 1 = n!$ permutasi yang berbeda.

Contoh 3. Menghitung Inversi

Tentukan banyaknya inversi pada permutasi-permutasi berikut:

(a) (6, 1, 3, 4, 5, 2) (b) (2, 4, 1, 3) (c) (1, 2, 3, 4)

Penyelesaian:

(a) Banyak inversi adalah 5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8.
(b) Banyak inversi adalah 1 + 2 + 0 = 3.
(c) Tidak ada iversi untuk permutasi ini.

> **Definisi**
> Suatu permutasi dikatakan genap (*even*) jika total banyaknya inversi adalah integer genap dan dikatakan ganjil (*odd*) jika total banyaknnya inversi adalah integer ganjil.

Contoh 4. Mengklafikasikan Permutasi

Tabel berikut ini mengklasifikasi berbagai permutasi dari {1, 2, 3} sebagai genap atau ganjil.

Permutasi	Banyaknnya inversi	Klasifikasi
(1, 2, 3)	0	Genap
(1, 3, 2)	1	Ganjil
(2, 1, 3)	1	Ganjil
(2, 3, 1)	2	Genap
(3, 1, 2)	2	Genap
(3, 2, 1)	3	Ganjil

Defenisi Determinan suatu ***hasilkali elementer*** (*elementary product*) dari suatu matriks A, $n \times n$, adalah hasilkali dari n enteri dari A, yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama.

Contoh 5. Hasilkali Elementer

Buatlah daftar semua hasilkali elementer dari matriks-matriks

$$(a)\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (*a*). Karena setiap hasilkali elementer memiliki dua faktor dan karena setiap faktor berasal dari baris yang berbeda, maka hasilkali elementer dapat ditulis dalam bentuk.

$$a_{1-}\,a_{2-}$$

di mana titik-titik kosong menunjukkan nomor kolom. Karena tidak ada dua faktor dalam hasilkali tersebut yang berasal dari kolom yang sama, maka nomor haruslah 1 2 atau 2 1. Jadi hasilkali elementer hanyalah $a_{11}a_{22}$ dan $a_{12}a_{21}$.

Penyelesai (*b*). Karena setiap hasilkali elementer memiliki tiga faktor, yang masing-masing berasal dari baris yang berbeda, hasilkali elementernya dapat ditulis dalam bentuk.

$$a_{1-}\,a_{2-}\,a_{3-}$$

Karena tidak ada faktor dalam hasil kali tersebut yang berasal dari kolom yang sama, maka nomor kolom tidak mengalami pengulangan; sebagai konsekuensinya, maka nomor-nomor tersebut harus membentuk permutasi dari himpunan {1, 2, 3}. Permutasi 3! = 6 ini menghasilkan daftar hasilkali elementer berikut.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \qquad a_{12}a_{21}a_{33} \qquad a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$a_{11}a_{23}a_{32} \qquad a_{12}a_{23}a_{31} \qquad a_{13}a_{22}a_{31}$$

suatu matriks *A*, $n \times n$, memiliki $n!$ hasilkali elementer. Hasilkali elementer tersebut adalah hasilkali berbentuk $a_{1i_1}\ a_{2i_2}.....a_{\dot{n}\ b}$, di mana ($j_1$, j_2,......j_n) adalah permutasi dari himpunan {1, 2,....*n*}. Sementara itu *hasilkali elementer bertanda dari A* (*signed elementary product from A*) adalah hasilkali elementer $a_{1i_1}\ a_{2i_2}.....a_{\dot{n}\ b}$ dikalikan dengan + 1 atau – 1. Kita menggunakan tanda + jika $a_{1i_1}\ a_{2i_2}.....a_{\dot{n}\ b}$ adalah permutasi genap dan tanda – jika $a_{1i_1}\ a_{2i_2}.....a_{\dot{n}\ b}$ adalah permutasi ganjil.

Contoh 6. Hasilkali Elementer Bertanda

Buatlah daftar hasil elementer bertanda dari matriks-matriks

$$(a)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (b)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

a

Hasilkali Elementer	Permutasi	Genap atau ganjil	Hasilkali Elementer Bertanda
$a_{11}a_{12}$ $a_{12}a_{21}$	(1, 2) (2, 1)	Genap Ganjil	$a_{11}a_{12}$ $-a_{12}a_{21}$

b.

Hasilkali Elementer	Permutasi	Genap atau ganjil	Hasilkali Elementer Bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{33}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	Genap	$a_{13}a_{23}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$
	(3, 2, 1)	Ganjil	

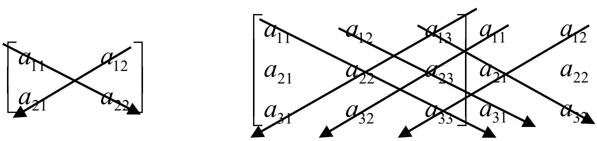
Kini kita akan mendefinisikan fungsi determinan.

Definisi
Misalnya A adalah suatu matriks bujursangkar. Fungsi determinan (*determinant function*) dinotasikan dengan det dan kita akan mendefinisikan det (A) sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A. angka det (A) disebut determinan dari A (*determinant of A*).

Contoh 7. Determinan dari Matriks 2 X 2 dan 3 X 3

$$(a)\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(b)\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



(*a*) Determinan dari matriks 2 x 2 (*b*) Determinan dari matriks 3 x 3

Contoh 8. Menghitung Determinan

Hitunglah determinan dari:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad dan \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan metode 2x2 di atas diperoleh
Det(A) = (3)(–2) – (1)(4) = -10
Dengan menggunakan metode pada gambar 3x3 diperoleh
Det (B) = (45) + (84) + (96) – (105) – (– 48) – (–72) = 240

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right]$$

Perlu ditekankan bahwa metode yang ditunjukkan di atas tidak dapat digunakan untuk menghitung determinan dari matriks 4 x 4 atau matriks yang lebih besar.

contoh, determinan dari suatu matriks 3 x 3 dapat ditulis sebagai.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad atau \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks A pada contoh 8 dengan menggunakan notasi kedua dapat ditulis sebagai.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = -10$$

Akhirnya, kita mencatat bahwa determinan dari *A* sering kali ditulis secara simbolis sebagai.

$$\det\,(A) = \sum \pm\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots\ldots a_{nj_n} \qquad (1)$$

di mana å menunjukkan bahwa suku-suku harus dijumlahkan untuk semua permutasi $(j_1, j_2, \ldots\ldots j_n)$ dan tanda + atau − dipilih untuk setiap suku tergantung pada apakah permutasinya genap atau ganjil. Notasi ini berguna jika definisi dari suatu determinan perlu ditekankan.

6. Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

Teorema 2
Misalkan A adalah suatu bujursangkar.
(a) Jika A memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka det(A) = 0
(b) Det (A) = det(A^T)

Teorema 3
Misalkan A adalah suatu bujursangkar.
Jika A adalah matriks segitiga n x n (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka det(A) adalah hasilkali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut;
yaitu det(A) =$a_{11}a_{22}\ldots\ldots a_{nn}$.

Contoh 1. Determinan Dari Matriks Segitiga Atas

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 2 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

$$\begin{bmatrix} a & c & e & h & l \\ b & d & f & i & m \\ 0 & 0 & g & j & n \\ 0 & 0 & 0 & k & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} = \text{(a)(d)(g)(k)(p) = axd xg xk xp}$$

Operasi Baris Elementer.

> **Teorema 4**
> Misalkan A adalah suatu matriks n x n
> (a) Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika satu baris atau satu kolom dari A dikalikan dengan suatu skalar k, maka det(B) = k det(A)
> (b) Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika dua baris atau dua kolom dari A dipertukarkan, maka det(B) = -det(A)
> (c) Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika kelipatan dari satu baris A ditambah ke baris lainnya atau ketika kelipat-an dari satu kolom ditambahkan ke kolom yang lain, maka det(B) = det(A)

Contoh 2. Diterapkan Teorema 4 untuk Determinan 3 X 3

Hubungan	Operasi
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **det (*B*) = *k* det (*A*)**	Baris pertama dari *A* dikalikan dengan *k*
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **det (*B*) = *k* det (*A*)**	Baris pertama dan kedua dari *A* dipertukarkan

$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **det (*B*) = *k* det (*A*)**	Suatu kelipatan dari baris kedua dari *A* ditambahkan ke baris pertama.

Kita akan membuktikan persamaan pada baris terakhir pada tabel kita memperoleh

$$\begin{aligned} \det(B) &= (a_{11}+ka_{21})a_{23}a_{33} + (a_{12}+ka_{22})a_{23}a_{31} + (a_{13}+ka_{23})a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{31}a_{22}(a_{13}+ka_{23}) - a_{33}a_{21}(a_{12}+ka_{22}) - a_{32}a_{23}(a_{11}+ka_{21}) \\ &= \det(A) + k(a_{21}a_{22}a_{33} +_{22} a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{31}a_{22}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{22} - a_{32}a_{23}a_{21}) \\ &= \det(A) + 0 = \det(A) \end{aligned}$$

Matriks Elementer

> **Teorema 5**
> Misalkan E adalah suatu matriks elementer n x n
> (a) Jika E adalah hasil perkaliam suatu baris dari In dengan k, maka det(E) = k
> (b) Jika E adalah hasil pertukaran dua baris I_N, maka det(E) = -1
> (c) Jika E adalah hasil penjumlahan kelipatan satu baris dari In ke baris lainnya, maka det(E) = 1

Contoh 3. Determinan dari Matriks Elementer

Determinan dari matriks elementer berikut ini, yang dihitung dengan inspeksi, mengilustrasikan

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- Baris kedua dari I_4 Baris pertama dan terakhir 7 kali baris terakhir dari I_4.
- dikali dengan 3. dari I_4 dipertukarkan. Ditambahkan ke baris pertama.

Matrisk dengan Baris atau Kolom yang Proporsional

> **Teorema 6**
> Jika A adalah suatu matriks bujursangkar dengan dua baris atau dua kolom yang proporsional, maka det(A) = 0

Contoh 4. Membentuk Baris Nol

Perhitungan berikut menggambarkan cara membentuk satu baris bilangan nol jika terdapat dua baris yang proporsional.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \longleftarrow$$

Baris kedua merupakan $-2b_1 + b_2$ untuk membentuk satu baris nol.

Masing-masing dari matriks berikut memiliki dua baris atau kolom yang proposional; jadi, masing-masing memiliki determinan nol.

=(-1.8) – (-2.4) = 0, [(1.8.3) +(-2.5.2) + (7.-4.-4)] –[(2.8.7)- (-4.5.1) - (3.-2.-4)] = 0, [(3.-2.1.15) + (-1.5.4.-9) +(4.0.5.3) + (-5.6.8.-12)] – [(-5.5.8.-9) – (4.-2.5.15) –

(-1.6.4.-12) – (3.3.1.0)] = 0$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$

Menghitung determinan dengan reduksi baris

Contoh 5. Reduksi Baris untuk Menghitung Determinan

Hitunglah det(A) di mana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Kita akan mereduksi A menjadi bentuk eselon baris (yaitu segitiga atas).

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \longleftarrow \text{b_1 dan b_2 dipertukarkan}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \longleftarrow \text{Suatu faktor bersama yaitu 3 dari baris pertama dikeluarkan melewati tanda determinan}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 55 \end{vmatrix} \longleftarrow -2b_1 + b_3$$

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \longleftarrow \text{Suatu faktor bersama yaitu -55 dari baris terakhir}$$

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

Contoh 6. Operasi Kolom untuk Menghitung Determinan

Hitunglah determinan dari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Determinan ini dapat dihitung dengan menggunakan operasi baris elementer untuk mereduksi *A* menjadi bentuk eselon baris, tetapi kita juga dapat mengubah *A* menjadi bentuk segitiga bawah dalam satu langkah dengan cara menambahkan –3 kali kolom pertama ke kolom keempat untuk memperoleh.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

Contoh ini menunjukkan perlunya kita memberikan perhatian pada operasi kolom untuk memperpendek perhitungan.

7. Sifat-sifat Fungsi Determinan

Sifat-sifat dasar deteminan

Misalkan *A* dan *B* adalah matriks-matriks *n* x *n*, dan k adalah skalar sebarang. Kita mulai dengan mempertimbangkan hubungan yang mungkin antara det(*A*), det(*B*) dan det(*kA*), det(*A*+*B*), dan det(*AB*),

Karena faktor bersama dari baris manapun dari suatu matriks dapat dikeluarkan melewati tanda determinan, dan karena tiap baris dari *n* baris pada *kA* memiliki faktor bersama *k*, maka kita memperoleh.

$$\det(A) = k^{n} \det(A) \qquad (1)$$

Sebagai contoh:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sayangnya, hubungan antara det(A), det(B) dan det(A +B) ≠ secara umum tidak sederhana. Khususnya, kami tekankan bahwa det(A + det(B) biasanya *tidak* sama dengan det(A) + det(B). Contoh berikut ini menggambarkan hal tersebut.

Contoh 1. det[A + B] ≠ det[A] + det[B]

Perhatikan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Di mana: det(A) = 1, det(B) = 8, dan det(A +B) = 23; sehingga det(A +B) ≠ det(A) + det(B)

Meskipun terdapat kesan negatif pada contoh di atas, tetapi terdapat satu hubungan penting menyangkut jumlah determinan-determinan yang sering kali berguna. Untuk mendapatkannya, perhatikan dua matriks 2 x 2 berikut ini, yang berbeda hanya pada baris keduanya:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{dan } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Di mana:

$$\begin{aligned}\det(A)+\det(B) &= (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+(a_{11}b_{22}-a_{12}b_{21})\\ &= a_{11}(a_{22}+b_{22})-a_{12}(a_{21}-b_{21})\\ &= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Jadi

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}$$

Ini merupakan kasus khusus dari hasil umum berikut.

Teorema 7

Misalkan A, B, dan C adalah matriks-matriks n x n yang berbeda hanya pada satu baris, misalnya baris ke-r, dan asumsikan bahwa baris ke-r dari C dapat diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri yang bersesuaian pada baris ke-r dari A dan B. Maka det(C) = det(A) + det(B).

Contoh 2. Menggunakan Teorema 7

Dengan menghitung determinan, Anda dapat memeriksa bahwa:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5\\ 2 & 0 & 3\\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1)\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 4 & 7\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Determinan dari Hasilkali Matriks

Ditunjukkan bahwa jika *A* dan *B* adalah matriks-matriks bujursangkar dengan ukuran yang sama maka:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad (2)$$

bukti dari teorema ini cukup rumit, sehingga kita perlu mengembangkan beberapa pendahuluan terlebih dahulu. Kita mulai dengan kasus khusus dari (2) di mana A adalah suatu matriks elementer. Karena kasus khusus ini hanya merupakan pendahuluan untu (2) kita menyebutnya sebagai lemma.

Teorema 7

Jika B adalah suatu matriks n x n dan E adalah suatu matriks elementer n x n, maka det(EB) = det(E) det(B).

Uji Determinan untuk Memeriksa Keterbalikan

Teorema berikut ini merupakan salah satu teorema paling mendasar dalam aljabar linear. Teorema ini memberikan kriteria penting mengenai keterbalikan dalam konteks determinan, dan teorema ini akan digunakan untuk membuktikan (2).

Teorema 8

Suatu matriks bujursangkar A dapat dibalik, jika dan hanya jika det(A) ≠ 0.

Contoh 3. Uji Determinan Untuk Memeriksa Keterbalikan

Karena baris pertama dan ketiga dari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Adalah proporsional, maka det(A) = 0. Jadi, A tidak dapat dibalik.

Teorema 9

Jika A dan B adalah matriks-matriks bujursangkar dengan ukuran yang sama, maka det(AB) = det(A) det(B).

Contoh 4. Membuktikan det[AB] = det[A] det[B]

Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

det(A) =1, det(B) = -23, dan det(AB) = -23

Jadi, det(AB) = det(A) det(B) sebagaimana dinyatakan oleh Teorema 9.

Teorema berikut memberikan hubungan yang berguna antara determinan dari suatu matriks yang dapat dibalik dan determinan dari inversinya.

Teorema 10
Jika A dapat dibalik, maka

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bukti. Karena $A^{-1}A=1$, maka $\det(A^{-1}A) = \det(I)$. Oleh karena itu, harus mempunyai $\det(A^{-1})\det(A) = 1$. Karena $\det(A) \neq 0$, bukti dapat diselesaikan dengan cara membaginya dengan det(A).

Sistem Linear Berbentuk Ax = λx

Banyak aplikasi dari aljabar linear yang melibatkan sistem dengan *n* persamaan linear *n* faktor yang tidak diketahui yang dinyatakan dalam bentuk

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{6}$$

Di mana λ adalah suatu skalar. Sistem semacam ini sebenarnya merupakan sistem linear homogen yang bersamar, karena (6) dapat ditulis kembali sebagai $\lambda x - Ax = 0$ atau, dengan menyisipkan suatu matriks indetitas dan memfaktorkan, sebagai:

$$(\lambda 1 - A)x = 0$$

Contoh 5. Menghitung $\lambda I - A = 0$

Sistem linear

$$x_1 + 3x_2 = \lambda x_1$$
$$4x_1 + 2x_2 = \lambda x_2$$

Dapat ditulis dengan bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Yang berbentuk (6) dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} dan\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sistem ini dapat ditulis kembali sebagai

$$\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau

$$\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yang berbentuk (7) dengan

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Masalah utama yang menjadi perhatian untuk sistem linear berbentuk (7) adalah untuk menentukan nilai λ, sehingga sistem tersebut memiliki solusi nontrival. Nilai λ yang demikian ini disebut **nilai karakteristik** *(characteristic value)* atau **nilai eigen** (*eigenvalue*) dari *A*. Jika λ adalah nilai eigen dari *A*, maka solusi nontrivia dari (7) disebut ***vektor eigen*** (*eigenvenctor*) dari *A* yang bersesuaian dengan λ.

Sesuai dengan teorema 8 bahwa sistem (l*I* – *A*) **x = 0** memiliki solusi nontrival jika dan hanya jika:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (8)$$

Ini disebut ***persamaan karaktresitik*** (*characteristic equation*) dari *A*. Nilai-nilai eigen dari *A* dapat dicari dengan menyelesaikan λ pada persamaan ini.

Contoh 6. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks *A* pada contoh 5.

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari *A* adalah

$$\det(\lambda I\text{-}A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \ atau\ \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

Bentuk faktorisasi dari persamaan ini adalah (λ + 2) (λ – 5) = 0, jadi nilai-nilai eigen dari *A* adalah λ = - 2 dan λ = 5.

Menurut definisi:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Adalah suatu vektor eigen dari *A* jika dan hanya jika x adalah solusi nontrivial dari (λ*I* – *A*) x = 0, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Jika $\lambda = -2$, maka (9) menjadi:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini menghasilakan (buktikan) $x_1 = -t$, $x_2 = t$, sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -2$ adalah solusi taknol berbentuk:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$$

Kembali dari (9), vektor eigen dari *A* yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ adalah solusi nontrival dari:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diserahkan kepada Anda untuk menyelesaikan sistem ini dan menunjukkan bahwa vektor eigen dari *A* yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$ adalah solusi taknol berbentuk:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} t \\ t \end{bmatrix}$$

Teorema 11 pernyataan-pernyataan yang Ekuivalen
Jika A adalah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen.
(a) *A dapat dibalik*
(b) **Ax** = **0** *hanya memiliki solusi trival*
(c) *Bentuk eselon baris teraksi dari A adalah* I_n.
(d) *A dapat dinyatakan sebagai hasilkali dari matriks-matrisk elementer*
(e) **Ax = b** *konsisten untuk setiap matriks* **b**, *n x 1.*
(f) **Ax = b** *memiliki tepat satu solusi untuk setiap matriks* **b**, *n x 1.*
(g) det(A) ≠ 0

C. LATIHAN

1. Yang manakah dari persamaan-persamaan berikut ini yang merupakan persamaan linear dalam x_1, x_2 dan x_3 ?
   (a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2x_3} = 1$
   (b) $x_1 + 3x_2 + x_1x_3 = 2$
   (c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$
   (d) $x_1-2 + x_2 + 8x_3 = 5$
   (e) $x_1 3/5 - 2x_2 + x_3 = 4$
   (f) $\pi x_1 - \sqrt{2x_2} + \frac{1}{3}x_3 = 71/3$
2. Tentukan himpunan solusi untuk masing-masing persamaan linear berikut ini.
   (a) $7x - 5y = 3$
   (b) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$
   (c) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$
   (d) $3v - 8w - 2x - y + 4z = 0$
3. Pada setiap bagian, tentukan apakah matriks berada dalam bentuk selon baris, bentuk eselon bais tereduksi, keduanya, atau bukan keduanya.

(a). $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(c). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (d). $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(e). $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f). $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Selesaikan setiap sistem berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

   (a) $5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$
   $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$

   (b) $x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1$
   $x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2$
   $x_1 - 12x_2 + 11x_3 + 16x_4 = 5$

5. Selesaikan *a, b, c,* dan *d* pada persamaan matriks berikut ini.

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitunglah pernyataan berikut ini (jika mungkin).

(a) D + E (b) D – E (c) 5A (d) -7C
(e) 28 – C (f) 4E – 2D (g) -3 (D+2E) (h) A – A
(i) tr (D) (j) tr (D – 3E) (k) 4tr (7B) (l) tr (A)

7. Misalkan

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m] \text{ dan } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa hasilkali yA dapat dinyatakna sebagai kombinasi linear dari matriks-matriks baris A dengan koefisien. Koefisien skalar yang berasal dari y.

8. Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$a = 4,\ b = -7$

Tunjukkan bahwa:

(a) A + (B + C) = (A + B) + C (b) (AB)C = A (BC)
(c) (a + b)C = aC + bC (d) a(B – C) = aB – aC

9. Dengan menggunakan matriks-matriks dan skalar-skalar pada Latihan 8, buktikan bahwa:

(a) (AT)T = A (b) (A + B)T = AT + BT

10. Gunakan Teorema untuk menghitung invers dari matriks-matriks berikut:

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, (c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, (d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. Misalkan A adalah matriks:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Pada setiap bagian, tentukan p(A)

(a) P(x) = x – 2 (b) p(x) 2x2 – x + 1 (c) p(x) = x3 – 2x + 4

12. Yang manakah dari matriks-matriks berikut ini yang merupakan matriks elementer?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. Perhatikan matriks-matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks-matriks elementer E_1, E_2, E_3, dan E_4 sedemikian rupa sehingga:

(a) $E_1A = B$ (b) $E_2B = A$ (c) $E_3A = C$ (d) $E_4C = A$

14. Tentukan invers dari masing-masing matriks 4 x 4 berikut ini, di mana k_1, k_2, k_3, k_4 dan k semuanya tak nol.

(a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

15. Tentukan semua nilai untuk λ di mana det (A) = 0

(a) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

16. Buktikan bahwa det(A) = det (AT) untuk:

$(a)\ A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $(b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

17. Buktikan bahwa det(AB) = det(A) det(B) untuk

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ dan \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18. Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Dengan mengasumsikan bahwa det(A) = -7, tentukan

(a) det(3A) (b) det(A-1) (c) det(2A-1) (d) det((2A)-1)

(e) $\det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

19. Tentukan det(A) dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris atau kolom pilihan Anda.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

20. Tanpa melakukan penghitungan langsung, tunjukkan bahwa

$$\det\begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Pembahasan

1. a. Bukan persamaan linear sebab variabel x mengandung akar dari
   b. Bukan persamaan linear sebab variabel mengandung hasil kali
   c. Bukan persamaan linear sebab variabel mengandung pangkat ≠ 1
   d. Bukan persamaan linear sebab variabel mengandung pangkat ≠ 1
   e. Bukan persamaan linear sebab varibel x mengandung akar dari

2. a. $7x - 5y = 3$

jika $x = t$ maka $7x - 5y = 3$

$7t - 5y = 3$

$-5y = 3 - 7x$

$Y = \frac{3-7y3-7y}{5 \quad 5}$

$Y = \frac{33}{55} - \frac{77}{55}t$, jadi $x = t$, $Y = \frac{33}{55} - \frac{77}{55}t$

b. $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

$3x_1 = 7 + 5x_2 - 4x_3 = x_2 = r_1 x_3 = s$ jika dimisalkan $x_2 = r.\ x_3 = s$

$3x_1 = 7 + 5x_2 - 4x_3$

$x_1 = 7 + 5r -- 4s$

$x_1 = \frac{7+5r-4s}{3}$

$x_1 = \frac{5}{3}r - \frac{4}{3}s + 7,\ x_2 = r.\ x_3 = s$

c. $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

$-8x_1 = 1 - 2x_2 - 5x_3 - 6x_4$ misalkan $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_4 = t$

$-8x_1 = 1 - 2r - 5s - 6t$

$x_1 = \underline{1 - 2r - 5s - 6t}$

$x_1 = \frac{22}{88}r - \frac{5}{8}s\frac{5}{8}s + \frac{6}{8}t\frac{6}{8}t + 1$

d. $3v - 8w - 2x - y + 4z = 0$

$3v = 8w + 2x + y - 4z$, misalkan $w = r$, $x = s$, $y = t$, $z = u$

$3v = \frac{8r+2s-t-4u}{3}$, jadi $v = \frac{8}{3}r + \frac{2}{3}s - \frac{1}{3}t - \frac{44}{33}u$

3. a. Bentuk eselon dan bentuk eselon baris tereduksi
   b. Bentuk eselon tereduksi
   c. Bentuk eselon dan bentuk eselon baris tereduksi
   d. Bentuk eselon
   e. Bentuk eselon
   f. Bentuk eselon baris tereduksi

4. Matriks yang diperbesar

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

b_1 x 1/5

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/5 & 6/5 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$2b_1 + b_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 27/5 & 1 \end{bmatrix}$$

b_2 x 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{bmatrix}$$

b_2 x 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{bmatrix}$$

maka persamaan yang bersesuaian

$x_1 + 12\, x_3 = 2$

$x_2 + 27\, x_3 = 5$

Sehinga $x_1 = 2 - 12\, x_3$

$x_2 = 5 - 27\, x_3$

dan di misalkan $x_3 = r$

Maka penyelesaianya **$x_1 = 2 - 12\, r$, $x_2 = 5 - 2\, r$, $X_3 = r$**

5. Persaman yang bersesuaian adalah

$a - b = 8$

$b + c = 1$

$c + 3d = 7$

$2a - 4d = 6$

Maka Matriks yang diperbesar

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

selanjutnya direduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi sehingga di dapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 13/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -27/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 32/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{bmatrix}$$

sehingga solusinya a = 13/5, b = -27/5, c = 32/5, d = 1/5

6. (a) D + E = dapat dijumlahkan karena mempunyai ordo yang sama

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, + \; E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

(b) D- E = $\begin{bmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

(c) 5 A

$$\mathbf{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

(d) -7 C

$$= -7\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} -7 & -35 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{bmatrix}$$

(e) 2B – C = tidak dapat di hitung sebab tidak terdefinisi

(f) 4E – 2D = $4E = \begin{bmatrix} 24 & 4 & 12 \\ -4 & 4 & 8 \\ 16 & 4 & 12 \end{bmatrix} - 2D \begin{bmatrix} 12 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(g) -3 (D+2E) = $\begin{bmatrix} -19 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -5 \\ -33 & -12 & -12 \end{bmatrix}$

(h) A – A = $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

(i) tr D = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 1 + 0 + 4 = 5$

(j) $\text{tr}\,(D-3E) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

maka tr = 17 -1 + 1 = 17

(k) $4\text{tr}\,(7B) = 7\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -7 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$ maka trace = 28 + 14 = 42

4(32) = 168

7. $y = [y1 \quad y2 \quad \ldots \quad ym] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ya11 & ya21 \ldots\ldots ymam1 \\ y2a12 & y2a22 \ldots . ymamn \\ & . \\ & , \\ & . \\ ya1n & y2a2n \ldots\ldots ymamn \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} a11 \\ a12 \\ . \\ . \\ . \\ a1n \end{bmatrix} + y2 \begin{bmatrix} a21 \\ a22 \\ . \\ . \\ . \\ am2 \end{bmatrix} \ldots\ldots + y_m \begin{bmatrix} am1 \\ am2 \\ . \\ . \\ . \\ amn \end{bmatrix}$

8. (a) A + (B + C) = (A + B) + C

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 1 \\ 1 & 12 & 11 \\ 5 & -1 & 19 \end{bmatrix}$

(b) (a + b)C = aC + bC

$(4 + (-7)) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -9 \\ -3 & -21 & -12 \\ -9 & -15 & -27 \end{bmatrix}$

(c) a(B – C) = aB – aC

$4\left[\begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \right] = 4\begin{bmatrix} 8 & -1 & -8 \\ -1 & -6 & -2 \\ 1 & -12 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -4 & -32 \\ -4 & -24 & -8 \\ 4 & -48 & =28 \end{bmatrix}$

9. (a) $(A^T)^T = A,\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix},$

$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A$

(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 2 & -6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ 2 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} + B^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -7 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ 2 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

10. (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $A^1 = \frac{1}{3.2-1.5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, $B^1 = \frac{1}{8-(-12)}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/20 & 3/20 \\ -4/20 & 2/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $C^1 = \frac{1}{-6-(-12)}\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & -4/6 \\ 2/6 & 6/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $D^1 = \frac{1}{6-0}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/6 & 0 \\ 0 & 2/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

11. (a) $A = P(x) = x - 2$, $P(A) = A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $B = p(x)\ 2x^2 - x + 1$, $P(A) = 2A^2 - A + 1I$

$$2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) $C = p(x) = x^3 - 2x + 4$

$P(A) = A^3 - 2A + 4I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

12. a. matriks E. b. bukan E c. Matriks E d. Matriks E

13. a. $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b. $E_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c. $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d. $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. a. $\begin{bmatrix} 1/k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/K2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/K3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/K4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/k4 \\ 0 & 0 & 1/k3 & 0 \\ 0 & 1/k2 & 0 & 0 \\ 1/k1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1/k & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k}2 & 1/k & 0 & 0 \\ \frac{1}{k}3 & -\frac{1}{k}2 & 1/k & 0 \\ -\frac{1}{k}4 & \frac{1}{k}3 & -\frac{1}{K}2 & 1/k \end{bmatrix}$

15. a. $\lambda = -3$ dan $\lambda = 1$
    b. $\lambda = -2$, $\lambda = 3$, $\lambda = 4$
16. $\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11$

    $(A)^T = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, maka det $(a)^T = -8 - 3 = -11$

    Sehingga Det (A) = Det $(A)^T$

17. $AB = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 31 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, maka det (AB) = 0

    det (A) = 0, det (B) = -32 sehingga det (A).det (B) 0
18. -189, $b = -\frac{-1}{7}$, $c = \frac{-8}{7}$, $d = \frac{-1}{36}$, $e = 7$
19. -40
20. det = 0

D. KUNCI JAWABAN LEMBAR KERJA MAHASISWA

LKM Satu (1)

1. **Merumuskan masalah**
   - Ya, persamaan linear
   - $2x + y + z = 4.700$
     $x + 2y + z = 4.300$
     $3x + 2y + z = 7.100$
2. **Menganalisis masalah**
   - X (buku tulis) = 1400
   - Y (pensil) = 1000
   - Z (penggaris) = 900

3. **Merumuskan hipotesis**
   Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
4. **Mengumpulkan data**
   Jawaban mahasiswa yang beragam (*open endid*)
5. **Pengujian Hipotesis**
   Jawaban mahasiswa yang beragam (*open endid*)
6. **Kesimpulan**
   Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)

LKM Dua (2)

1. **Merumuskan masalah**
   - Jumlah persaama di atas 4 dan jumlah variabelnya 6
   - Dalam persamaan SPL b = knstanta real
2. **Menganalisis masalah**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (open ended)
   - Penyelesaian SPL dengan elimansi Gausian berbeda dengan elimansi Gauss jordan
3. **Merumuskan hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open endid*)
4. **Mengumpulkan data**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open endid*)
5. **Pengujian Hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang bergam (*open endid*)
6. **Kesimpulan**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open endid*)

LKM Tiga (3)

1. **Merumuskan masalah**
   - Jumlah persaamaan di atas 3 yaitu u, v,w dan x
   - Sebab b = 0
   - Matriks yang diperbesar yaitu: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

2. **Menganalisis masalah**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam
   - Jawaban mahasiswa yang beragam dengan elimansi Gauss Jordan
3. **Merumuskan hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
4. **Mengumpulkan data**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
5. **Pengujian Hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang bergam (*open ended*)
6. **Kesimpulan**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)

LKM Empat (4)

1. **Merumuskan masalah**
   - Ukuran Matriks A = 3 x 3, B = 3x 3 dan C = 2 x 4
   - A = entri a,b,c,d,e,f,g,h,i B = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 dan c = 0,1
   - Entri A tidak sama B dan C
2. **Menganalisis masalah**
   - Terdefenisi yaitu 3 x3, b tidak terdefenisi, c tidak terdefinisi, d tidak terdefinisi
3. **Merumuskan hipotesis**
   - a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, b = $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, b) B = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

     x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, b = $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
   - SPL berhubungan dengan matriks
   - Tidak sama
4. **Mengumpulkan data**
   - Matriks adalah susunan bilangan yang berisi angka dan

variable yang dapat dimanipulasi, dikalikan, dijumlahkan dan dikurangkkan

5. **Pengujian Hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
6. **Kesimpulan**
   Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)

LKM Lima (5)

1. **Merumuskan masalah**
   - Matriks A, B dan C tidak sama
   - A + B = terdefenisi, A + C = tidak terdefenisi, C – A = tidak terdefinisi
   - Kombinasi linear yang dapat dibuat adalah:

$$= 1 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{33} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_3\,3 \end{bmatrix}$$

2. **Menganalisis masalah**
   - Matriks dapat dikurangkan dan dijumlahkan apabila mempunyai ordo yang sama sedangkan perkalian matriks adalah apabila jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua.
   - Jawaban mahasiswa yang beragam.
3. **Merumuskan hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
4. **Mengumpulkan data**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
5. **Pengujian Hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
6. **Kesimpulan**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)

LKM Enam (6)

1. **Merumuskan masalah**
   - AT = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$, $C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & c_{41} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{bmatrix}$, $D^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$
   - Trace A = Tidak terdefenisi, Trace B = $b_{11} + b_{22} + b_{23}$, Trace C = $c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{34}$, Trace D = 2 + 5 = 7
   - Bukti $(DT)^{-1} = (D^{-1})^T$
     $(D^T)^{-1} = (10 + 12) = 22$ dan $(D^{-1})^T = (10 + 12) = 22$
   - D (x) = $2x^2 - 3x + 5$
     $= 2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
     $= \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 32 & 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -12 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 17 \\ 44 & 20 \end{bmatrix}$
2. **Menganalisis masalah**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
3. **Merumuskan hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
4. **Mengumpulkan data**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
5. **Pengujian Hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
6. **Kesimpulan**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)

LKM Tujuh (7)

1. **Merumuskan masalah**
   - A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow$ hsl terakhir $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
   - B = $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow$ hsl terakhir $\begin{bmatrix} -7/13 & 2/13 \\ -4/39 & 1/13 \end{bmatrix}$
   - C = $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$ hsl terakhir $\begin{bmatrix} 0 & 1/6 \\ -1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$

- $D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow$ hsl terakhir $\begin{bmatrix} 1/6 & 111/90 & -12/90 \\ 14/36 & -1/8 & 1/90 \\ -1/18 & -7/90 & -4/90 \end{bmatrix}$
- $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \rightarrow$ hsl terakhir $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2. **Menganalisis masalah**
   - Penyelesaian dengan metode operasi matriks adalah membuat matriks dalam bentuk [I| A]
3. **Merumuskan hipotesis**
   - Langkah dalam mencari A^{-1} yaitu matriks dibuat dalam bentuk [A| I] selanjutnya di lakukan operasi baris untuk mendapatkan bentuk matriks[I|A]
4. **Mengumpulkan data**
   - Perlu diperhatikan dalam mencari A^{-1} adalah langkah-langkah operasi baris sehingga hasilnya dapat dibuktikan $A.A^{-1} = I$
5. **Pengujian Hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
6. **Kesimpulan**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)

LKM Delapan (8)

1. **Merumuskan masalah**
   - A = 4 , B = 9,C = 10,D = 2
   - A = genap, B = ganjil, C = genap, D = genap
   - 3. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 22$ 4. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -1$ 5. $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 52$

     6. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -3\sqrt{6}$ 7. $\begin{vmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{vmatrix} = 3000$

     8. $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -64$ 9. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -23$ 10. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -11$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix} = -123$ 12. $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 4 \end{vmatrix} = -c^4 + 16c^2 - 7c + 14$

13. (a) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$, $\lambda = -3$ dan $\lambda = 1$

(b) $\begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 -$

$6\lambda - 30 = 0$

2. **Menganalisis masalah**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
3. **Merumuskan hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
4. **Mengumpulkan data**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
5. **Pengujian Hipotesis**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)
6. **Kesimpulan**
   - Jawaban mahasiswa yang beragam (*open ended*)

Daftar Rujukan

Anton, H. 1995. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Ayres Jr. F. 1982. *Theory and Problems of Matrices*. New York: Schaum.

Bill Jacob. *Linier Algebra*. 1990. New York: Freeman Company.

K.A. Stroud. 2002. *Matematika Teknik*. Jakarta: Erlangga.

Mahmud, Imrona. *Aljabar Linear Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Supranto, J. 2007. *Pengantar Matrix*. Jakarta: LP-FEUI.

Soemartojo. N dan Tapilouw Marthen. 1999. *Proram linear*. Jakarta: U.T.

Siagian. P. 1987. Penelitian *Operasional Teori dan Praktik*. Jakarta: UI. Press.

Simangunsong, Wilson. 2005. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Tentang Penulis

Dr. Mariam Nasution, M.Pd. Lahir di Sihitang, 24 Februari 1970, dan bertempat tinggal di Gang Lentera Kelurahan Sihitang, Padangsidimpuan Tenggara-Sumatera Utara. Memilki 3 orang anak (Mardiah, Rizki, dan Amar) dari pernikahan dengan Ali Murni, M.Ap. Menempuh pendidikan S-1 pada bidang Pendidikan Matematika di STKIP Tapanuli Selatan, dan melanjutkan S-2 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Padang pada tahun 2006. Meraih gelar Doktor Ilmu Pendidikan pada Konsentrasi Pendidikan MIPA di Universitas Negeri Padang pada tahun 2021. Bertugas sebagai dosen PNS di IAIN Padangsidimpuan sejak tahun 2003. Untuk menghubungi penulis silahkan melakukan kontak ke nomor WhatsApp 081397577453 dan e-mail: borunasution70@gmail.com.