MATEMATIKA DISKRIT

Diterbitkan atas bantuan penulisan buku
LPPM IAIN Padangsidimpuan tahun 2021

MATEMATIKA DISKRIT

Dr. Almira Amir, S.T., M.Si.

KENCANA

MATEMATIKA DISKRIT

Edisi Pertama

ISBN 978-623-384-036-1
14 x 20,5 cm
viii, 96 hlm
Cetakan ke-1, November 2021

Kencana 2021.1556

Penulis
Dr. Almira Amir, S.T., M.Si.

Diterbitkan Oleh Kencana
Bekerja Sama dengan IAIN Padangsidimpuan Press

Desain Sampul
Eko Widiyanto

Tata Letak
Jefri & Laily Kim

Penerbit
K E N C A N A
Jl. Tambra Raya No. 23 Rawamangun - Jakarta 13220
Telp: (021) 478-64657 Faks: (021) 475-4134

Divisi dari PRENADAMEDIA GROUP
e-mail: pmg@prenadamedia.com
www.prenadamedia.com
INDONESIA

SAMBUTAN

REKTOR IAIN PADANGSIDIMPUAN

Bismillahirrahmanirrahim

Puji dan syukur dipanjatkan kehadirat Allah Swt., berkat rahmat dan hidayah-Nya akhirnya penerbitan buku ajar dan buku referensi di lingkungan IAIN Padangsidimpuan dengan menggunakan anggaran tahun 2021 ini bisa diwujudkan. Hal ini bisa terlaksana berkat kerja sama pihak LPPM dengan para dosen dalam rangka menerbitkan buku-buku dosen IAIN Padangsidimpuan, baik itu berupa buku ajar, buku referensi, maupun buku bacaan.

Apresiasi yang tinggi untuk semua dosen yang telah menyumbangkan karya pikirnya bagi kemajuan dunia pendidikan dan kemajuan dunia ilmiah di IAIN Padangsidimpuan. Keberadaan buku ini diharapkan dapat menjadi informasi bagi para akademisi dan menjadi bahan bacaan bagi mahasiswa terhadap berbagai ranah keilmuan. Selain itu juga diharapkan dapat menjadi bahan ajar bagi pada dosen dalam mengampu dan mengemban matakuliah yang dibebankan.

Penerbitan buku-buku karya dosen-dosen di lingkungan IAIN Padangsidimpuan dilakukan melalui kerja sama antara IAIN Padangisidimpuan Press dan Penerbit PrenadaMedia Group. Dengan adanya kerja sama yang dibangun melalui LPPM IAIN Padangsidimpuan, diharapkan penerbitan buku ini akan terus berlangsung setiap tahunnya. Terima kasih kepada LPPM yang telah melakukan gebrakan untuk kemajuan IAIN Padangsidimpuan melalui karya-karya ilmiah pada dosen.

Demikian disampaikan, besar harapan wakan munculnya karya-karya dosen lainnya di IAIN Padangsidimpuan.

Rektor IAIN Padangsidimpuan

dto

Prof. Dr. H. Ibrahim Siregar, MCL.

KATA PENGANTAR

KETUA LPPM IAIN PADANGSIDIMPUAN

Bismillahirrahmanirrahim

Puji dan syukur dipanjatkan kehadirat Allah Swt., berkat rahmat dan hidayah-Nya buku dengan judul *Matematika Diskrit* ini berhasil diterbitkan. Buku ini adalah satu dari 16 judul buku yang diterbitkan oleh IAIN Padangsidimpuan Press tahun 2021.

Buku ini merupakan Bahan Ajar Dosen Matematika. Buku ini dapat menjadi bahan referensi Dosen, mahasiswa, maupun pustakawan dalam mempelajari, dan memahami Matematika Diskrit seperti Himpunan Klasik, dan Himpunan Modern dan dapat menerapkannya untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan bidang ilmu lainnya maupun dalam kehidupan sehari-hari. Keberadaan buku ini diharapkan dapat menjadi informasi bagi para akademisi khususnya mahasiswa dalam mempelajari, dan memahami matematika diskrit.

Ucapan terima kasih kepada para dosen yang telah berkontribusi dalam rangka penulisan buku ini, semoga akan lahir karya-karya ilmiah bernas lainnya dari tangan dosen-dosen IAIN Padangsidimpuan. Terima kasih juga kepada Pusat Penelitian dan Penerbitan yang telah menginisasi penerbitan buku-buku dosen ini, semoga kegiatan ini akan terus berlanjut setiap tahunnya.

Demikian disampaikan, semoga kemunculan buku ini bermanfaat bagi mahasiswa dan dosen IAIN Padangsidimpuan.

Ketua LPPM IAIN Padangsidimpuan

dto

Dr. H. Zul Anwar Ajim Harahap, M.A.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur ke hadirat Allah Swt., atas segala limpahan rahmat dan kasih sayang-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan bahan ajar Dosen untuk matakuliah Matematika Diskrit pada Program Studi/Tadris Pendidikan Matematika. Penyusanan bahan ajar dosen ini diharapkan berguna untuk mencapai tujuan pembelajaran yang akan dicapai berdasarkan kompetensi dasar.

Bahan ajar Dosen ini memuat pembahasan materi-materi, contoh-contoh dan latihan soal yang disusun bertujuan untuk meningkatkan kemampuan pemahaman konsep dan kemampuan memecahkan masalah yang berhubungan dengan matakuliah Matematika Diskrit. Penulis menyadari bahwa bahan ajar yang disusun masih banyak terdapat kekurangan, sehingga perlu di kembangkan lagi untuk kedepannya. Penulis mengharapkan kritik dan saran dari para pembaca.

Akhirnya, penulis berharap semoga bahan ajar dosen ini bermanfaat dan dapat memberi informasi serta sumbangan pemikiran demi kelancaran proses pembelajaran.

Padangsidimpuan, Oktober 2021

Penulis,

Almira Amir

DAFTAR ISI

1

HIMPUNAN KLASIK

A. STANDAR KOMPETENSI

Mahasiswa dapat menjelaskan konsep-konsep dalam teori Himpunan Klasik dan Himpunan Modern dan dapat menerapkannya untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan bidang ilmu lainnya maupun dalam kehidupan sehari-hari.

B. KOMPETENSI DASAR

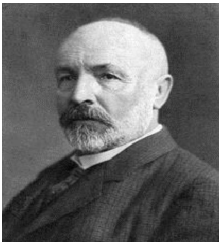
Menjelaskan, mengidentifikasi, dan memberikan contoh himpunan klasik dan himpunan modern.

C. INDIKATOR

1. Mahasiswa dapat menganalisis tentang himpunan klasik dan himpunan modern melalui proses analogi dengan memperhatikan syarat/ketentuan dari himpunan tersebut.
2. Mahasiswa dapat memberikan penjelasan tentang operasi dari himpunan klasik dan himpunan modern menarik kesimpulan secara logis.

1.1 PENGERTIAN HIMPUNAN KLASIK

Himpunan klasik atau himpunan tegas (*crisp set*) merupakan konsep himpunan yang dikembangkan oleh seorang ahli matematika Jerman yaitu George Cantor (1845-1918). Cantor lahir di St. Petersburg, Rusia pada 3 Maret 1845 sebagai anak pertama dari pasangan Georg Woldermar Cantor dan Maria Bohm. Cantor mengenyam pendidikan dasarnya di rumah melalui guru privat. Di usia 11 tahun, ia bersama keluarganya pindah ke Jerman dan Cantor melanjutkan pendidikannya di Gymnasium lalu pindah ke



Gambar 1. Penemu Konsep Matematika Klasik

Frankfrut dan Darmstadt. Di tahun 1860, Cantor lulus dari Realschule di Darmstadt dengan hasil yang luar biasa dan menunjukkan bahwa ia memiliki bakat yang hebat dalam bidang matematika, khususnya trigonometri

Teori himpunan yang dikembangkan oleh Cantor disebut juga himpunan klasik atau himpunan tegas. Dalam himpunan klasik atau disebut juga himpunan tegas, keanggotaan pada suatu himpunan (sebut misal himpunan A) hanya akan memiliki dua kemungkinan, yaitu anggota A atau tidak menjadi anggota A. Jika objek tersebut menjadi anggota A, maka nilai keanggotaannya 1 dan jika tidak nilai keanggotaannya 0.

Dalam kehidupan sehari-hari, himpunan disebut juga sebagai kumpulan, gugus, kelompok atau *set*. Misalnya beberapa contoh kalimat berikut:

a. Himpunan negara-negara ASEAN
b. Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Tadris Matematika
c. Sekumpulan hewan melata
d. Kelompok gadis cantik
e. Kumpulan lukisan indah

Dalam Al-Qur'an surah *ar-Rum* ayat 15 disebutkan konsep himpunan sebagai berikut:

Barangsiapa yang beriman dan beramal soleh, maka mereka semua akan dihimpun di dalam sorga bersama orang-orang yang bergembira.

Apakah yang dimaksud dengan himpunan klasik? Dalam konteks matematika sebutan himpunan pada option a, b, dan c termasuk himpunan klasik, karena anggotanya jelas atau dapat disebutkan secara tegas. Dalam *option d* dan *e*, termasuk ke dalam sebutan bukan himpunan klasik, karena anggotanya tidak jelas atau tidak dapat disebutkan secara tegas.

Definisi 1: Himpunan Klasik/Tegas (Crisp Set)
Sekumpulan elemen/benda/objek yang dapat didefinisikan dengan jelas dan memiliki batasan yang jelas.

Contoh 1:

Selidiki manakah berikut ini yang merupakan himpunan

- R = Koleksi nama-nama Nabi Rasul
- M = Kumpulan makanan lezat
- A = Himpunan bilangan asli yang kurang dari 15
- B = Himpunan nilai mahasiswa untuk yang tertinggi
- J = Himpunan bayi yang menggemaskan
- D = Himpunan ibukota Propinsi di Indonesia
- Z = Himpunan nama-nama Allah
- U = {a,2,3,1,a,4,3}

Solusi:

a. R merupakan himpunan, karena objek anggotanya dapat terdefinisi dengan jelas di mana *elemen* dari R = {Adam, Idris, Nuh, Hud, Soleh, Ibrahim, Luth, Ismail, Ishak, Ya'kub, Yusuf, Ayub, Syuib, Musa, Harun, Zulkifli, Daut, Sulaiman, Ilyas, Ilyasa, Yunus Zakaria, Yahya, Isa, Muhammad}

b. Karena **lezat** bersifat relatif, tergantung dari cipta rasa seseorang, maka makanan lezat dinyatakan tidak terdefinisi. Oleh karena itu M **bukan** termasuk himpunan, akan tetapi bisa disebut himpunan jika konsep lezat diberikan kriteria-kriteria tertentu. Analisis himpunan pada option c, d, e, f dan g diberikan sebagai latihan mahasiswa.

1.2 KEANGGOTAAN HIMPUNAN KLASIK

Keanggotaan Himpunan Klasik

Keanggotaan dari suatu objek dinyatakan dengan $\in$ = 1 dan bukan keanggotaan dari suatu objek dinyatakan dengan $\notin$ = 0.

Penyajian Himpunan Klasik

Enumerasi

yaitu menuliskan dengan mendaftarkan semua anggota himpunan di antara dua tanda kurung kurawal.

Contoh:

Himpunan A dengan lima buah bilangan genap pertama

A = {2, 4, 6, 8, 10}

Notasi Pembentuk Himpunan

yaitu menuliskan syarat yang harus dipenuhi oleh anggotanya

Notasinya

A = {x | x syarat yang harus dipenuhi oleh x}

Temukan cara penyajian himpunan klasik/ tegas (*crisp set*) yang lainnya

---

1.3 OPERASI HIMPUNAN KLASIK

Gabungan

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Irisan

$A \cap B - \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

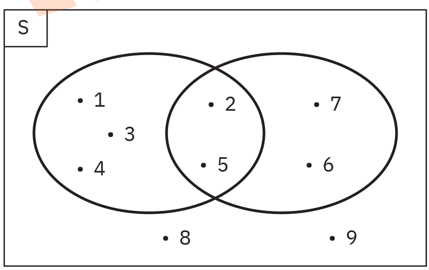
Komplemen

$A' = \{x \mid x \notin A, x \in X\}$

Jelaskan operasi himpunan tegas (*crisp set*) untuk gabungan, irisan, dan komplemen!

Temukan dan jelaskan operasi himpunan tegas (*crisp set*) untuk perkalian dan selisih!

Contoh 2:



Temukan anggota himpunan dari hasil operasi gabungan, irisan, dan komplemen, perkalian dan selisih.

Sifat-sifat operasi himpunan klasik/tegas

a. Tertutup

b. Komutatif
c. Asosiatif
d. Distributif
e. Idempoten

Jelaskan sifat-sifat dari operasi himpunan tegas (*crisp set*) dan berikan contoh untuk perkalian dan selisih!

Contoh 3:

Gunakan definisi dan sifat operasi irisan, gabungan, dan penjumlahan pada himpunan berikut:

$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

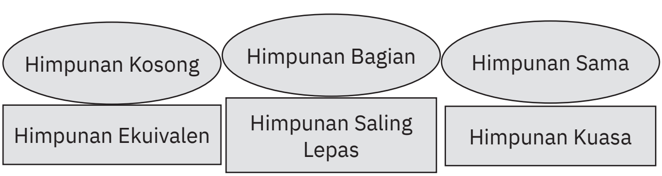
$B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

Tentukan:

a. $A \cap B$
b. $A \cap C$
c. $B \cap C$
d. $A \cup B$
e. $B \cup C$
f. $A \cup C$
g. $A + B$
h. $B + C$
i. $A - C$
j. $A \cap (B \cup C)$
k. $A \cup (B \cap C)$
l. $A \cap (B + C)$
m. $A \cup (B + C)$
n. $A + (B \cap C)$

1.4 JENIS-JENIS HIMPUNAN



Jelaskan dan beri contoh untuk masing-masing dari jenis-jenis himpunan tersebut!

Latihan Soal

1. Berilah contoh 2 himpunan yang bila diiriskan hasilnya adalah himpunan kosong.
2. Berilah contoh 2 himpunan tak hingga yang bila diiriskan hasilnya himpunan berhingga.
3. Diketahui:
   $A = \{ x \mid 1 < x \;\; 5$, maka x ialah bilangan bulat$\}$.
   $B = \{ x \mid x \;\; 5$, maka x ialah bilangan prima$\}$.
   Tentukanlah hasil dari $(A \cup B)$!
4. Ada 40 orang peserta yang ingin mengikuti sebuah lomba. Lombanya ialah ada baca puisi yang di ikuti oleh 23 orang peserta, lalu ada lagi lomba baca puisi dan menulis cerpen yang di ikuti oleh 12 orang peserta. Hitunglah berapa banyak peserta yang mengikuti lomba menulis cerpen?
5. Diketahui himpunan:
   $B = \{x \mid 3 < x < 8,\ x$ bilangan asli$\}$ dan
   $B = \{x \mid 5 \leq x \leq 10,\ x$ bilangan asli$\}$
   Tentukan anggota dari $C - B$!
6. Diketahui dua himpunan A dan B. Jika $(A \cap B) = A$, $n(A) = 5$, dan $n(B - A) = 6$, tentukan $n(B)$!
7. Nyatakanlah himpunan berikut dengan menggunakan syarat keanggotaan atau notasi pembentuk himpunan.
   a. $A = \{1, 4, 7, 10, 13\}$
   b. $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
8. Dari himpunan berikut, manakah yang termasuk himpunan kosong (*empty set*)?
   a. $A = \{x \mid x^2 + 1,\ x \in$ bilangan asli$\}$
   b. $B = \{x \mid b$ huruf sebelum a pada abjad Latin$\}$
   c. $C = \{x \mid 13 < x < 16,\ x \in$ bilangan prima$\}$
   d. $D = \{x \mid x < 1,\ x \in$ bilangan cacah$\}$

9. Jika A = {4} dan , C = {x | $x^2 - 16 = 0$, x > 0} apakah dapat dikatakan bahwa A = B?
10. Jika A = {a, b}, B {c, d, e}, dan A = {c, d, e, f}, C = {c, d, g}, maka tunjukkan bahwa:
    a. Ax (B ∩ C) = (AxB) ∩ (AxC)
    b. Ax (B – C) = (AxB) – (AxC)

2

HIMPUNAN MODERN

A. STANDAR KOMPETENSI

Mahasiswa dapat menganalisis konsep himpunan fuzzy dan dapat memanfaatkannya untuk menyelesaikan permasalahan di berbagai bidang ilmu.

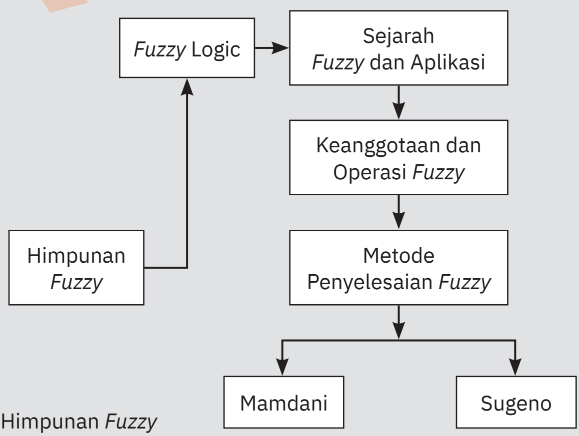
B. KOMPETENSI DASAR

Menjelaskan konsep fuzzy, menerapkan dan merancang fuzzy di berbagai disiplin ilmu.

C. INDIKATOR

1. Mahasiswa dapat membedakan himpunan fuzzy dan himpunan tegas.
2. Mahasiswa dapat menerapkan fuzzy logic dalam berbagai disiplin ilmu.
3. Mahasiswa dapat merepresentasikan masalah melalui aturan fuzzy.
4. Mahasiswa dapat menentukan metode penyelesaian fuzzy logic.

D. SKEMA HUBUNGAN MATERI PERKULIAHAN



Gambar 2.
Peta Konsep Himpunan *Fuzzy*

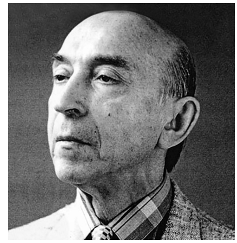
2.1 SEJARAH *FUZZY* LOGIC

Logika hanya didasarkan atas 2 nilai kebenaran yaitu TRUE (1) dan FALSE (0) kadang-kadang dirasakan kurang lengkap untuk menyatakan logika berpikir manusia. Sehingga dikembangkan logika yang tidak hanya bernilai 0 atau 1 tapi menggunakan logika yang punya interval nilai antara [0,1] yang disebut dengan logika samar (*fuzzy logic*).

Fuzzy logic (FL) diperkenalkan pada tahun 1965 oleh **Lotfi A. Zadeh**, seorang Profesor di bidang ilmu komputer, Universitas California, Berkeley. FL dipakai untuk menyatakan data atau informasi yang bersifat tidak pasti atau samar.

Tapi sebenarnya sejarah *fuzzy logic* (FL) dimulai jauh sebelumnya yaitu ketika jaman Yunani Kuno. *Aristotle* dan beberapa filsuf lainnya, dalam rangka menemukan teori logika dia mengemukakan hukum-hukum yang disebut "*laws of thought*". Salah satu di antaranya adalah "*law of excluded middle*" yang menyatakan bahwa setiap pernyataan (*propotition*) harus bernilai TRUE (T) atau FALSE (F). Bahkan ketika Parminedes mengusulkan versi pertama dari hukum tersebut (400 BC) langsung mendapat pertentangan dari Heraclitus yang menyatakan bahwa setiap pernyataan hanya bernilai TRUE dan NOT TRUE. Pada saat itu **Plato** yang meletakkan pondasi bagi *Fuzzy* Logic, menyatakan bahwa ada daerah ketiga (selain TRUE dan FALSE).

Salah satu pernyataan alternatif yang berbeda dengan logika dengan 2 nilai kebenaran (Aristotle) pertama kali dikemukakan oleh **Lucasiewicz** (1920). Dia mengemukakan logika dengan 3 nilai kebenararan beserta dengan penjelasan matematiknya. Nilai ke-3 dia sebut dengan istilah "mungkin" (*possible*). Dan diberikan nilai numerik yaitu antara TRUE (1) dan FALSE (0). Selanjutnya Lucasiewicz mengemukakan tentang logika dengan 4 nilai kebenaran, 5 nilai kebenaran, dan kemudian menyatakan bahwa logika memiliki nilai tak berhingga (*infinite*). Logika dengan 3 nilai dan logika dengan nilai tak berhingga yang paling menarik. Tapi selanjutnya dia lebih memilih logika dengan 4 nilai kebenaran karena paling mudah disesuaikan dengan logika Aristotle (2 nilai kebenaran). Juga perlu dicatat **Knuth**, juga menyatakan logika dengan 3 nilai kebenaran hampir sama seperti Lucasiewicz. Knuth berspekulasi bahwa matematik akan menjadi lebih nyaman jika dibandingkan secara tradisional dengan hanya 2 nilai kebenaran.



Gambar 3.
Tokoh *Fuzzy* Logic

Ide dari logika dengan nilai tak berhingga sudah diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh dalam tulisannya yang berjudul tentang "*Fuzzy* Sets" (himpunan *fuzzy*) disertai dengan penjelasan matematik teori himpunan *fuzzy* dan juga tentang logika *fuzzy*. Dalam teori ini juga dijelaskan tentang pembentukan Fungsi Keaggotaan (*membership function*) yang beroperasi pada *range* nilai antara [0, 1]. Di samping itu juga diusulkan tentang operasi-operasi matematika logika yang pada prinsipnya merupakan pengembangan dari logika klasik.

Teori *fuzzy logic* (FL) sudah menyediakan teori matematika untuk menampung ketidakpastian proses berpikir manusia. Beberapa ciri dari *fuzzy logic* (FL) (Zadeh, 1992), yaitu:

a. Dalam FL, logika pasti (*exact*) dianggap sebagai kasus terbatas dari logika tidak pasti (*approximate*).
b. Dalam FL, segala sesuatu (pernyataan) ditentukan berdasarkan tingkatan (*degree*).
c. Dalam FL, pengetahuan merupakan kumpulan dari batasan-batasan yang elastis atau tidak pasti (*fuzzy*).
d. Pengambilan keputusan adalah proses peralihan dari batasan-batasan elastis atau tidak pasti.
e. Semua sistem logika dapat dibuat menjadi samar (*fuzzy*).

2.2 APLIKASI *FUZZY* LOGIC DALAM INDUSTRI

Pada masa sekarang ini kita dapat melihat berbagai penerapan *fuzzy logic* pada alat-alat dan mesin yang digunakan dalam kehidupan sehari-sehari manusia. Dengan digunakannya *fuzzy logic* dalam prinsip kerja alat-alat dan mesin penunjang pekerjaan manusia tersebut membuat waktu, biaya, tenaga menjadi lebih efektif dan efisien sehingga juga meningkatkan tingkat produktifitas pekerjaan yang dilakukan manusia. Berikut ini adalah beberapa bentuk implementasi *fuzzy logic* dalam berbagai bidang di kehidupan sehari-hari manusia.

1. *Air conditioner* (AC)

   Sistem kontrol AC menggunakan *fuzzy logic*, seperti berikut: "Jika suhu udara semakin hangat, daya pendinginan naik sedikit, jika udara semakin dingin, matikan daya ke bawah."

   Beberapa keuntungan yang diperoleh adalah mesin menjadi halus sehingga tidak cepat rusak, suhu kamar yang nyaman menjadi lebih konsisten dan peningkatan efisiensi (penghematan energi).
2. *Vacuum cleaner*

   Prinsip kerja *vacuum cleaner* sebagai berikut: "Karakteristik lantai dan jumlah debu yang dibaca oleh sensor inframerah dan mikroprosesor akan memilih daya yang sesuai dengan kontrol *fuzzy* berdasarkan karakteristik lantai."

   Karakteristik lantai meliputi jenis (kayu, semen, ubin, kelembutan karpet, karpet tebal, dan lain-lain). Pola perubahan jumlah debu yang melewati sensor inframerah dapat dideteksi. Mikroprosesor menetapkan pengaturan yang sesuai dengan vakum dan daya motor menggunakan skema kontrol *fuzzy*. Lampu merah dan hijau dari penyedot debu menunjukkan jumlah debu tersisa di lantai.
3. *Automatic transmission system*

   Dalam sistem transmisi otomatis konvensional, sensor elektronik mengukur kecepatan kendaraan dan membuka *throttle*, dan *gear* bergeser berdasarkan nilai variabel-variabel yang telah ditentukan. Dengan digunakannya *fuzzy logic* membuat transmisi kontrol *fuzzy* mampu membaca beberapa variabel termasuk kecepatan kendaraan dan akselerasi, membuka throttle, laju perubahan pembukaan *throttle*, beban mesin, dan gaya mengemudi. Ketika variabel ini terdeteksi maka akan diberi bobot nilai dan agregat *fuzzy* dihitung untuk memutuskan kapan akan oper. *Controler* ini dikatakan lebih fleksibel, halus, dan efisien, memberikan kinerja yang lebih baik. Sebuah sistem yang terintegrasi dikembangkan oleh Mitsubishi juga menggunakan logika *fuzzy* untuk kontrol aktif dari sistem suspensi, *four-wheel-drive* (traksi), kemudi, dan pendingin udara.

4. *Washing machine*

   Sistem kontrol *fuzzy* yang digunakan pada mesin cuci ini dapat mengendalikan kualitas dan kuantitas kotoran, ukuran beban, dan jenis kain, dan mengatur siklus cuci dan jumlah deterjen sesuai. Adapun jumlah air di mesin cuci diukur dengan sensor cahaya.

2.3 PENGERTIAN HIMPUNAN KABUR (*FUZZY* SET)

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, teori himpunan dikembangkan lebih modern lagi untuk mengatasi salah satu masalah di atas yang disebut dengan himpunan modern atau himpunan kabur (*fuzzy set*). Konsep ini dikembangkan oleh Prof. Lutfi Ahmad Zadeh berkebangsaan Iran. Himpunan *fuzzy* merupakan perkembangan dari himpunan tegas. Konsep ini merupakan pendefinisian untuk suatu himpunan yang keangggotaan tidak jelas menjadi jelas.

Himpunan *fuzzy* adalah sekumpulan objek X dan anggotanya dinyatakan dengan x di mana masing-masing objek memiliki nilai keanggotaan "μ" atau disebut juga dengan nilai kebenaran.

Himpunan *fuzzy* dari A di dalam X adalah himpunan dengan sepasang anggota yang dapat dinyatakan dengan: $A = \{\mu_A(x)|x;\ x \in X,\ a(x) \in [0,1] \in R\}$, (Kuncahyo B, Ginardi, Arieshanti I, 2012).

Definisi 2: (Himpunan Fuzzy)

Sekumpulan benda/objek yang sifat/karakteristiknya tidak bisa di definisikan dan di identifikasi dengan jelas atau dapat dinyatakan bersifat relatif (ketidakpastian).

Ada beberapa hal yang perlu diketahui dalam sistem *fuzzy*, yaitu:

a. Variabel *fuzzy*

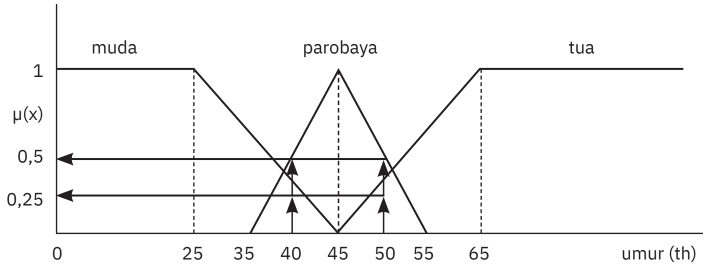
   Variabel *fuzzy* merupakan variabel yang hendak dibahas dalam suatu sistem *fuzzy*. Contoh: umur, temperatur, permintaan, dan lain-lain.

b. Himpunan *fuzzy*

   Himpunan *fuzzy* merupakan suatu grup yang memiliki suatu kondisi atau keadaan tertentu dalam suatu variabel *fuzzy*. Contoh: variabel temperatur terbagi menjadi 5 himpunan *fuzzy*, yaitu PANAS, DINGIN, SEJUK, NORMAL, dan HANGAT.

Nilai keanggotaannya menunjukkan bahwa suatu item m suatu ruang output. Seperti pada gambar dibawah satu ruang output tidak hanya bernilai benar atau salah. Nilai 0 menunjukkan salah, nilai 1 menunjukkan benar, dan masih ada nilai-nilai yang terletak antara benar dan salah.

Seseorang dapat masuk dalam 2 himpunan berbeda, MUDA dan PAROBAYA, PAROBAYA dan TUA. Seberapa besar eksistensinya dalam himpunan tersebut dapat dilihat pada nilai keanggotaannya. Gambar berikut ini menunjukkan himpunan *fuzzy* untuk variabel umur.



Dari gambar di atas, dapat dilihat bahwa:

a. Seseorang yang berumur 40 tahun, termasuk dalam himpunan MUDA dengan μMUDA[40] = 0,25; namun dia juga termasuk dalam himpunan PAROBAYA dengan μPAROBAYA[40] = 0,5.
b. Seseorang yang berumur 50 tahun, termasuk dalam himpunan MUDA dengan μMUDA[50] = 0,25; namun dia juga termasuk dalam himpunan PAROBAYA dengan μPAROBAYA[50] = 0,5.

Himpunan *fuzzy* memiliki 2 atribut, yaitu (Kusumadewi, 2004):

a. Linguistik yaitu penamaan suatu grup yang mewakili suatu keadaan atau kondisi tertentu dengan menggunakan bahasa alami, contoh: MUDA, PAROBAYA, TUA.
b. Numeris yaitu suatu nilai (angka) yang menunjukan ukuran dari suatu variabel. Contoh: 40, 25, 50, dan sebagainya.

Ada beberapa hal yang perlu diketahui dalam memahami sistem *fuzzy*, yaitu:

a. Variabel *fuzzy*, merupakan variabel yang hendak dibahas dalam suatu sistem *fuzzy*. Contoh: umur, temperatur.
b. Himpunan *fuzzy*, merupakan suatu grup yang mewakili suatu kondisi tertentu dalam variabel *fuzzy*. Contoh: variabel umur terbagi menjadi 3 himpunan *fuzzy* yaitu MUDA, PAROBAYA dan TUA. Variabel temperatur terbagi menjadi 5 himpunan *fuzzy*, yaitu: DINGIN, SEJUK, NORMAL, HANGAT, PANAS.
c. Semesta pembicaraan, adalah keseluruhan nilai yang diperbo-

lehkan untuk dioperasikan dalam suatu variabel *fuzzy*. Nilai semesta pembicaraan dapat berupa bilangan positif maupun negatif.

d. Domain, adalah keseluruhan nilai yang diijinkan dalam semesta pembicaraan dan boleh dioperasikan dalam suatu himpunan *fuzzy*. Nilai domain dapat berupa bilangan positif maupun negatif.

2.4 KEANGGOTAAN DAN OPERASI FUZZY

Pada himpunan *fuzzy* nilai keanggotaan terletak pada rentang 0 sampai 1. Apabila x memiliki nilai keanggotaan *fuzzy* μA[x] = 0 berarti x tidak menjadi anggota himpunan A, demikian pula apabila x memiliki nilai keanggotaan *fuzzy* μA[x] = 1 berarti x menjadi anggota penuh pada himpunan A. Suatu himpunan *fuzzy* pada himpunan semesta U dapat dinyatakan dengan nilai fungsi keanggotaan pada interval [0,1].

Suatu himpunan *fuzzy* A pada himpunan semesta *S* dapat dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut elemen dan nilai keanggotaanya (Wang, 1997: 22). Secara matematis pernyataan tersebut dapat ditulis dengan: A = {x, μA(x)|x∈S}

Apabila terdapat dua himpunan *fuzzy* A, B pada semesta *S* maka untuk menentukan nilai keanggotaan antar elemen tertentu dalam semesta S mengikuti teori fungsi himpunan pada umumnya, yaitu dengan menggunakan operasi gabungan (*union*), irisan (*intersection*), dan komplemen. Operasi tersebut didefinisikan secara khusus untuk mengkombinasi dan memodifikasi himpunan *fuzzy*. Nilai keangggotaan sebagai hasil dari operasi 2 himpunan sering dikenal dengan α-predikat.

Ada 3 operator dasar yang diciptakan oleh Prof. A. Zadeh yaitu:

a. **Operator OR**

Operator ini berhubungan dengan operasi gabungan. α- predikat sebagai hasil dari operasi dengan menggunakan operator

OR diperoleh dengan mengambil nilai keanggotaan terbesar antar-elemen pada himpunan yang bersangkutan.

$$\mu_{A \cup B} = \max\ (\mu_A x,\ \mu_B y)$$

b. **Operator AND**

Operator ini berhubungan dengan operasi irisan. α-predikat sebagai hasil dari operasi dengan menggunakan operator AND diperoleh dengan mengambil nilai keanggotaan terkecil antar-elemen pada himpunan yang bersangkutan.

$$\mu_A = \min\ (\mu_A x,\ \mu_B y)$$

c. **Operator NOT**

Operator ini berhubungan dengan operasi komplemen, α-predikat sebagai hasil dari operasi dengan menggunakan operator NOT diperoleh dengan menggunakan rumus:

$$\mu_A = 1 - \mu_A x$$

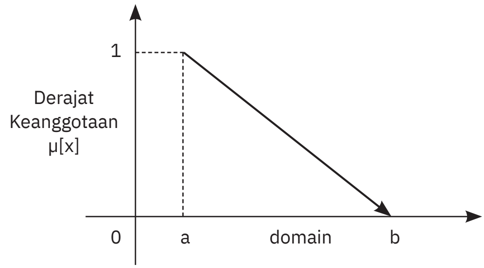
2.5 FUNGSI KEANGGOTAAN FUZZY

Fungsi keanggotaan merupakan fungsi yang memetakan elemen suatu himpunan ke nilai keanggotaan pada interval [0,1]. Fungsi keanggotaan bisa direpresentasikan dengan berbagai cara, yaitu representasi linier, segitiga, dan trapesium.

a. Representasi Kurva Linier

Representasi paling sedeharna dalam fungsi keanggotaan *fuzzy* yaitu representasi kurva linier yang digambarkan sebagai suatu garis lurus yang dikelompokkan atas 2, yaitu kurva linier turun dan kurva linier naik. Keadaan himpunan *fuzzy* linier ada dua. Pertama, himpunan mengalami penurunan dari derajat keanggotaan satu bergerak ke kanan menuju derajat keanggotaan yang lebih rendah menuju nol disebut kurva linier turun.

Gambar 4.
Representasi Kurva Linier Turun



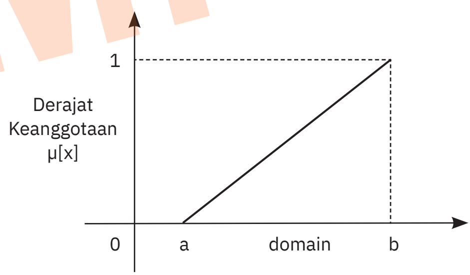
Fungsi keanggotaan linier turun:

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{b - x}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

Keterangan:
a = nilai domain terkecil saat derajat keanggotaan terkecil
b = derajat keanggotaan terbesar dalam domain

Jika himpunan mengalami kenaikan dari derajat keanggotaan nol bergerak ke kanan menuju derajat keanggotaan yang lebih tinggi menuju satu maka disebut kurva linier naik.

Gambar 5.
Representasi Kurva Linier Naik



Fungsi keanggotaan linier naik:

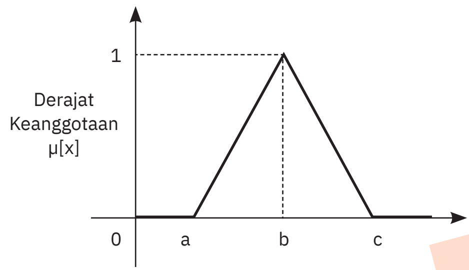
$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x = b \end{cases}$$

Keterangan:
a = nilai domain terkecil saat derajat keanggotaan terkecil
b = derajat keanggotaan terbesar dalam domain

b. Representasi Kurva Segitiga

Representasi kurva segitiga merupakan gabungan dari representasi linier (Klir, Clair, & Yuan, 1997: 83-86). Representasi kurva segitiga dapat dilihat pada gambar berikut:

Gambar 6.
Representasi Kurva Segitiga



Fungsi keanggotaan dari representasi segitiga, yaitu:

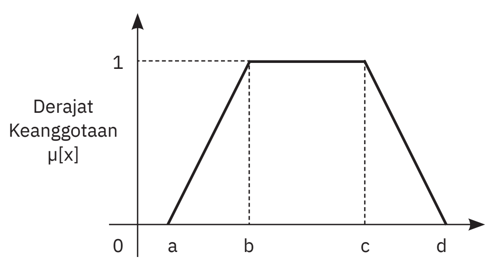
$$\mu(x) = \begin{cases} 0, \; x \le a \;\; \textit{atau} \;\; x \ge c \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \;\; a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, \;\; b \le x \le c \end{cases}$$

Keterangan:
a = nilai domain terkecil saat derajat keanggotaan terkecil
b = derajat keanggotaan terbesar dalam domain
c = nilai domain terbesar saat derajat keanggotaan terkecil

c. Representasi Kurva Trapesium

Representasi kurva trapesium pada dasarnya seperti bentuk segitiga, hanya saja ada beberapa titik yang memiliki nilai keanggotaan 1.

Gambar 7.
Representasi Kurva Trapesium



Fungsi keanggotaan dari representasi trapesium, yaitu:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \ \ atau \ \ x \ge d \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \end{cases}$$

Keterangan:
a = nilai domain terkecil saat derajat keanggotaan terkecil
b = derajat keanggotaan terbesar dalam domain
c = nilai domain terbesar saat derajat keanggotaan terkecil

2.6 PENGOPERASIAN SISTEM FUZZY

Pengoperasian sistem *fuzzy* diatur berdasarkan aturan himpunan *fuzzy*. Beberapa keistimewaan sistem *fuzzy* (Wang, 1997: 6), yaitu:

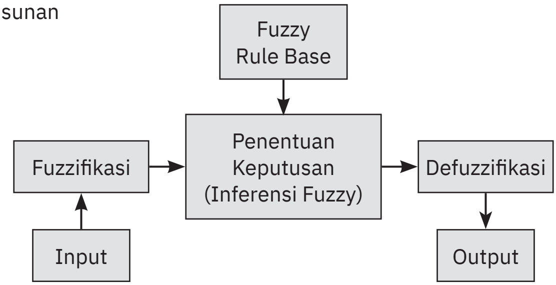
a. Sistem *fuzzy* cocok digunakan pada sistem pemodelan karena variabelnya bernilai real.
b. Sistem *fuzzy* menyediakan kerangka yang digunakan untuk menggabungkan aturan-aturan *fuzzy* implikasi yang bersumber dari pengalaman manusia.
c. Terdapat berbagai pilihan dalam menentukan fuzzifier dan deffuzifier sehingga dapat diperoleh sistem *fuzzy* yang paling sesuai dengan model.

Elemen dasar dalam sistem *fuzzy* (Wang, 1997:89):

a. Basis kaidah (*rule base*), berisi aturan-aturan secara linguistik yang bersumber dari para pakar.
b. Mekanisme pengambil keputusan (*inference engine*), merupakan bagaimana para pakar mengambil suatu keputusan dengan menerapkan pengetahuan (*knowledge*).
c. Proses fuzzifikasi (*fuzzifiction*), yaitu mengubah nilai dari himpunan tegas ke nilai *fuzzy*.
d. Proses defuzzifikasi (*defuzzification*), yaitu mengubah nilai *fuzzy* hasil inferensi menjadi nilai tegas.

Skema susunan pada sistem *fuzzy* ditunjukkan sebagai berikut:

Gambar 8. Skema Susunan Sistem *Fuzzy*



a. **Fuzzifikasi**.
Menurut Wang (1997: 105), fuzzifikasi didefinisikan sebagai pemetaan dari himpunan tegas ke himpunan *fuzzy*. Pada proses fuzzifikasi harus memenuhi kriteria yaitu semua anggota yang terdapat pada himpunan tegas harus termuat dalam himpunan fuzzy dan sistem fuzzy yang digunakan harus bisa mempermudah perhitungan.

b. ***Fuzzy rule base***.
Rule base yang digunakan pada himpunan *fuzzy* adalah aturan IF-THEN.

c. **Inferensi *fuzzy***
Merupakan tahap evaluasi pada aturan *fuzzy*. Tahap evaluasi dilakukan dengan proses implikasi dalam menalar nilai masukan (input *fuzzy*) untuk menentukan nilai keluaran (output *fuzzy*) berupa himpunan *fuzzy* sebagai bentuk pengambilan keputusan. Salah satu model penalaran yang banyak dipakai adalah penalaran max-min. Dalam penalaran ini, proses pertama yang dilakukan adalah melakukan operasi min sinyal keluaran lapisan fuzzifikasi, yang diteruskan dengan operasi max untuk mencari nilai keluaran yang selanjutnya akan didefuzzifikasikan sebagai bentuk keluaran.

d. **Defuzzifikasi**

Merupakan proses yang berkebalikan dengan proses pada fuzzifikasi. Defuzzifikasi dinyatakan sebagai pemetaan dari himpunan *fuzzy* ke himpunan tegas. Pada proses defuzzifikasi ada tiga kriteria yang harus dipenuhi yaitu masuk akal, perhitungannya sederhana dan kontinu.

2.7 METODE PENYELESAIAN FUZZY

Fuzzy inference system merupakan sebuah kerangka kerja perhitungan berdasarkan konsep teori himpunan *fuzzy* yang digunakan untuk menarik kesimpulan atau suatu keputusan (Kusumadewi, 2006). Untuk penarikan kesimpulan dalam *Fuzzy* Inference System terbagi menjadi dua metode, yaitu Metode Sugeno dan metode *fuzzy* Mamdani. Perbedaan dari kedua metode ini terletak pada output yang dihasilkan, proses komposisi aturan dan defuzzifikasinya.

Pada metode Sugeno, output yang dihasilkan berupa fungsi linear atau konstanta. Output ini berbeda dengan yang dihasilkan oleh Metode *Fuzzy* Mamdani, di mana metode ini menghasilkan output berupa suatu nilai pada domain himpunan *fuzzy* yang dikategorikan ke dalam komponen linguistik. Kelemahan dari output berupa fungsi linear atau konstanta adalah nilai output yang dihasilkan harus sesuai dengan nilai yang telah ditentukan, hal ini timbul masalah apabila nilai output tidak sesuai dengan kriteria yang telah ditentukan. Output ini dapat dikatakan benar apabila dapat menyajikan output yang ditentukan oleh antesenden (Salman, 2010). Oleh karena itu, metode *fuzzy* Mamdani lebih akurat dalam menghasilkan suatu output berupa himpunan *fuzzy*.

a. Metode Fuzzy Mamdani

Metode *fuzzy* Mamdani merupakan salah metode untuk penarikan kesimpulan dari *fuzzy inference system* sehingga menghasilkan suatu keputusan terbaik dalam permasalahan yang tidak pasti (Bova, 2010). Metode *fuzzy* Mamdani diperkenalkan oleh Ebrahim Mamdani pada 1975. Metode *fuzzy* Mamdani dalam prosesnya menggunakan kaidah-kaidah linguistik dan memiliki algoritma *fuzzy* yang dapat dianalisis secara matematika, sehingga lebih mudah dipahami (McNeill, 1994).

Kelebihan pada metode *fuzzy* Mamdani adalah lebih spesifik, dan lebih memperhatikan kondisi yang akan terjadi untuk setiap daerah *fuzzy*-nya, sehingga menghasilkan hasil keputusan yang lebih akurat (Bova, 2010). Kelebihan lainnya, metode ini lebih cocok apabila input diterima dari manusia, sehingga lebih diterima oleh banyak pihak. Adapun kelemahan dari metode *fuzzy* Mamdani adalah metode ini hanya dapat digunakan untuk data dalam bentuk kuantitatif saja, tidak dapat digunakan untuk data yang berbentuk kualitatif (Salman, 2010). Prosedur metode Mamdani dilakukan melalui beberapa tahapan, yaitu pembentukan himpunan *fuzzy*; aplikasi fungsi implikasi; komposisi aturan; defuzzifikasi (Ebrahim Mamdani, 1975).

Tahap pertama dari prosedur metode *fuzzy* Mamdani adalah pembentukan himpunan *fuzzy* atau dikenal pula dengan istilah fuzzifikasi. Fuzzifikasi merupakan proses yang dilakukan dengan mengtransformasi input himpunan tegas (*crisp*) ke dalam himpunan *fuzzy* (Ross, 2010). Hal ini dilakukan karena input yang digunakan awalnya adalah dalam bilangan tegas (*real*) dari suatu himpunan tegas (*crisp*). Himpunan *fuzzy* ini didasarkan pada tingkatan linguistiknya yang dikelompokkan dalam suatu variabel *fuzzy*. Pada setiap himpunan *fuzzy* tersebut ditentukan domain dan fungsi keanggotaan yang berikutnya digunakan untuk menentukan nilai keanggotaan setiap himpunan *fuzzy* berdasarkan variabel inputnya yang merupakan bilangan *real*, di mana nilai keanggotaan tersebut terletak pada interval [0,1]. Pada metode *fuzzy* Mamdani ini fungsi keanggotaan yang digunakan adalah fungsi keanggotaan trapesium, fungsi keanggotaan segitiga dan fungsi keanggotaan bahu kiri atau kanan. Hal ini dikarenakan pada fungsi keanggotaan trapesium terdapat dua titik dari himpunan *fuzzy* yang memiliki nilai keanggotaan satu. Apabila hanya terdapat satu titik dari himpunan *fuzzy* yang memiliki nilai keanggotaan satu, maka digunakan fungsi keanggotaan segitiga. Fungsi keanggotaan bahu kiri atau kanan digunakan untuk mengawali dan mengakhiri variabel suatu daerah *fuzzy*.

Tahap kedua dari prosedur metode *fuzzy* Mamdani adalah penerapan fungsi implikasi yang terdiri atas kumpulan premis dan satu konklusi. Fungsi implikasi berguna untuk mengetahui hubungan antara premis-premis dan konklusinya. Bentuk dari fungsi implikasi ini adalah dengan pernyataan IF is THEN is, dengan dan adalah skalar, serta A dan adalah himpunan *fuzzy* (Ade Lahsasna, 2010). Dalam istilah logika *fuzzy*, proposisi yang mengikuti IF disebut dengan antisenden, sedangkan proposisi yang mengikuti THEN disebut dengan konsekuen. Proposisi atau aturan *fuzzy* ini dapat diperluas dengan menggunakan penghubung *fuzzy* AND (interseksi).

Tahap ketiga dari prosedur metode *fuzzy* Mamdani adalah komposisi aturan. Pada tahap ini, suatu prosedur dengan tujuan untuk menentukan inferensi dari kumpulan dan korelasi antar aturan menggunakan metode Max, dengan makna lain yaitu prosedur menggabungkan fungsi keanggotaan dari aturan. aplikasi fungsi implikasi (Ade Lahsasna, 2010). Solusi himpunan *fuzzy* diperoleh dengan cara mengambil nilai maksimum aturan, kemudian menggunakannya untuk memodifikasi daerah *fuzzy* dan mengaplikasikannya ke dalam *output* (keputusan akhir) dengan menggunakan operator OR (*union*). Apabila semua proposisi telah dievaluasi, maka output akan berisi suatu himpunan *fuzzy* yang merefleksikan kontribusi dari setiap proposisi.

Tahap terakhir dari prosedur metode *fuzzy* Mamdani adalah proses defuzzifikasi. Proses defuzzifikasi dipergunakan untuk menafsirkan nilai keanggotaan *fuzzy* menjadi keputusan tertentu atau bilangan real (Bova, 2010). Proses defuzzifikasi ini perlu dilakukan, karena output keputusan *fuzzy* adalah tetap variabel linguistik dan membutuhkan konversi ke dalam variabel crisp. Metode yang digunakan dalam proses defuzzifikasi ini adalah defuzzifikasi dengan metode centroid (titik pusat). Metode ini memperhatikan kondisi setiap daerah *fuzzy*-nya, sehingga menghasilkan hasil yang lebih akurat (Salman, 2010). Metode centroid yaitu suatu metode di mana semua daerah *fuzzy* dari hasil komposisi aturan digabungkan dengan tujuan untuk membentuk hasil yang optimal dan mengambil titik pusat daerah *fuzzy*. Prosedur defuzzifikasi dengan menggunakan metode centroid, yaitu menentukan momen (integral dari masing-masing fungsi keanggotaan dari komposisi aturan), menentukan luas, dan menentukan titik pusat.

b. Metode Fuzzy Sugeno

Fuzzy metode Sugeno merupakan metode inferensi *fuzzy* untuk aturan yang direpresentasikan dalam bentuk IF – THEN, di mana output (konsekuen) sistem tidak berupa himpunan *fuzzy*, melainkan berupa konstanta atau persamaan linear (KUS-02: 98). Metode tersebut akan digunakan untuk menentukan jumlah pemesanan barang berdasarkan data persediaan barang dan jumlah permintaan. Data persediaan barang. dan jumlah permintaan adalah variabel-variabel yang akan direpresentasikan dengan fungsi keanggotaan *fuzzy*, selanjutnya metode sugeno untuk menentukan jumlah pemesanan barang diterapakan dalam sistem pendukung keputusan (SPK). Kemudian SPK akan mengolah data-data tersebut dengan metode sugeno dan akan menampilkan keluaran (*output*) berupa jumlah barang yang akan dipesan. Metode ini diperkenalkan oleh Takagi-Sugeno Kang pada 1985. Model Sugeno menggunakan fungsi keanggotaan *singleton*, yaitu fungsi keanggotaan yang memiliki derajat keanggotaan 1 pada suatu nilai *crisp* tunggal dan 0 pada nilai *crisp* yang lain.

Untuk mendapatkan *output* (hasil), maka terdapat 4 langkah/

tahapan sebagai berikut:

1) **Pembentukan himpunan *fuzzy***
   Menentukan semua variabel yang terkait dalam proses yang akan ditentukan. Untuk masing-masing variabel input, tentukan suatu fungsi fuzzifikasi yang sesuai.
2) **Aplikasi fungsi implikasi**
   Menyusun basis aturan, yaitu aturan-aturan berupa implikasi-implikasi *fuzzy* yang menyatakan relasi antara variabel input dengan variabel output.
3) **Komposisi aturan**
   Apabila sistem terdiri dari beberapa aturan, maka inferensi diperoleh dari kumpulan dan korelasi antar aturan. Metode yang digunakan dalam melakukan inferensi sistem *fuzzy*, yaitu Metode Min (Minimum). Pada metode ini, solusi himpunan *fuzzy* diperoleh dengan cara mengambil nilai minimum aturan, kemudian menggunakan nilai tersebut untuk memodifikasi daerah *fuzzy* dan mengaplikasikannya ke output dengan menggunakan operator AND. Jika semua proporsi telah dievaluasi, maka output akan berisi suatu himpunan *fuzzy* yang merefleksikan kontribusi dari tiap-tiap proporsi. Secara umum dapat dituliskan:

   $\mu(x_i) = \min(\mu s(x_i), \mu k(x_i))$

   Keterangan:
   $\mu s(x_i)$ = nilai keanggotaan solusi *fuzzy* sampai aturan ke-i
   $\mu k(x_i)$ = nilai keanggotaan konsekuen *fuzzy* sampai aturan ke-i

4) **Penegasan**
   Masukan dari proses penegasan adalah suatu himpunan *fuzzy* yang diperoleh dari komposisi aturan-aturan *fuzzy*, sedangkan output yang dihasilkan merupakan suatu bilangan real yang tegas. Sehingga jika diberikan suatu himpunan *fuzzy* dalam range tertentu, maka dapat diambil suatu nilai tegas tertentu

sebagai output. Apabila komposisi aturan menggunakan metode Sugeno makna defuzzifikasi (Z^*) dilakukan dengan cara mencari nilai rata-rata terpusatnya.

$$Z^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu i.zi}{\mu i}$$

Keterangan:

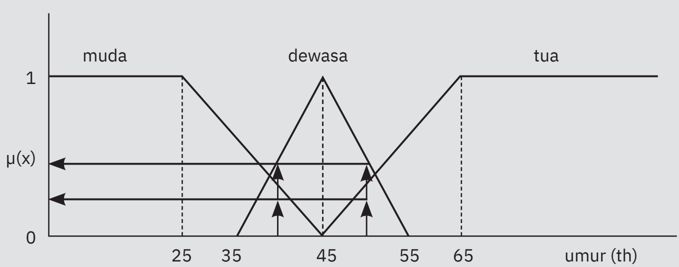
Z^* = output perhitungan logika *fuzzy*

Zi = Z masing-masing rule

μi = derajat keanggotaan hasil proses

Latihan Soal

1. Tentukan himpunan berikut yang tidak terdefinisi sebagai himpunan tegas ....
   a. K = {Bina *tan* g berkaki enam}
   b. $K = \{x|x < 2, x \in R\}$
   c. $K = \{x| -2 < x < -1, x \in Z\}$
   d. K = {nama ilmuwan jenius)
2. Diketahui himpunan tegas:
   S = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}
   P = {e, f, g, h}
   Q = {a, b, c, i, j}
   Tentukan nilai keanggotaan μP[i], μQ[a], μQ[h].
3. Diketahui nilai keanggotaan untuk variabel UMUR secara grafis seperti gambar berikut:



   Tentukan nilai μMuda[40] dan μDewasa[40] untuk seseorang yang berumur 40 tahun!

4. Diberikan himpunan kabur C dengan fungsi yang menyatakan nilai keanggotaan pada semesta bilangan real non-negatif berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{4} & \text{untuk } 0 \le x < 2 \\ \dfrac{4{,}4 - 0{,}7x}{3} & \text{untuk } 2 \le x < 5 \\ 0{,}3 & \text{untuk } 5 \le x < 8 \\ \dfrac{3 - 0{,}3x}{2} & \text{untuk } 8 \le x < 10 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukan:

a. supp (C);
b. core (C);
c. crossover (C);
d. Height (C);
e. Center (C)

3

INDUKSI MATEMATIKA

A. STANDAR KOMPETENSI

Mahasiswa dapat menjelaskan konsep Induksi Matematika dan dapat menerapkannya untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan bidang ilmu lainnya maupun dalam kehidupan sehari-hari.

B. KOMPETENSI DASAR

Menjelaskan, mengidentifikasi, dan memberikan contoh induksi matematika

C. INDIKATOR

1. Mahasiswa dapat menganalisis tentang induksi matematika sederhana dengan memperhatikan syarat/ketentuan.
2. Mahasiswa dapat menganalisis tentang induksi matematika sederhana dengan memperhatikan syarat/ketentuan.
3. Mahasiswa dapat menganalisis tentang induksi matematika yang dirampatkan dengan memperhatikan syarat/ketentuan.
4. Mahasiswa dapat menganalisis tentang induksi matematika kuat dengan memperhatikan syarat/ketentuan.

3.1 PENGERTIAN INDUKSI MATEMATIKA

Sebuah cara pembuktian yang sering dipakai, simple, dan sangat ampuh dalam matematika kombinatorial dan ilmu komputer, dikenal dengan prinsip induksi matematika.

Definisi 3: Induksi Matematika

Suatu metode dalam pembuktian dalam Matematika yang menyangkut pernyataan/proposisi bilangan bulat positif/bilangan asli dengan menggunakan prosedur/langkah-langkah yang baku. Prosedur/langkah-langkah pembuktian dalam induksi matematika yaitu Langkah **basis** dan **langkah induksi** (**hipotesis induksi)**.

3.2 PENGELOMPOKKAN INDUKSI MATEMATIKA

Induksi matematika di kelompokkan atas 3 bagian yaitu (Rinaldi M, 2012):

a. Induksi matematika sederhana.
b. Induksi matematika yang dirampatkan.
c. Induksi kuat.

a. Induksi Matematika Sederhana

Induksi matematika sederhana Induksi matematika ialah teknik untuk membuktikan proposisi dalam bentuk “n P(n), dengan semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan bulat positif.”

Suatu bukti dengan menggunakan induksi matematika bahwa “P(n) benar untuk setiap n bilangan bulat positif” terdiri dari dua langkah:

1. Langkah basis:
   - Tunjukkan bahwa P(1) benar.
2. Langkah induksi:
   - Tunjukkan bahwa P(k) à P(k + 1) benar untuk setiap k.
   - P(k) untuk suatu k tertentu disebut hipotesa induksi.

Contoh 1:

Berapakah jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama?

Solusi:

Tebakan: “Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.”

Bukti:

Misalkan P(n): proposisi “Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.”

1. Langkah basis:
   - P(1) benar, karena $1 = 1^2$.
2. Langkah induktif:
   - Asumsikan bahwa P(k) benar untuk semua k, yaitu:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$.

- Kita perlu menunjukkan bahwa P(k + 1) benar, yaitu:
  $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$.
  $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$
- Kesimpulan yang diperoleh bahwa "Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n^2."

a. Induksi Matematika yang Dirampatkan

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$, jika p(n) benar maka p(n+1) juga benar.

Contoh 2:

Untuk semua bilangan bulat tidak negatif *n*, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Solusi:

1. Langkah basis:
   Untuk *n* = 0 (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh: $2^0 = 2^{0+1} - 1$.
   Ini jelas benar, sebab: $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$
   $= 2^1 - 1$
   $= 2 - 1 = 1$
2. Langkah induksi:
   Andaikan bahwa untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, adalah benar (hipotesis induksi).
   Kita harus menunjukkan bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$ juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:
   $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$ (dari hipotesis induksi)

$= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 = (2 . 2^{n+1}) - 1$

$= 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

a. Induksi Kuat

Terdapat bentuk lain dari induksi matematika yang sering dipergunakan dalam pembuktian. Teknik ini dinamakan induksi kuat.

Tahapan pembuktiannya, sebagai berikut:

1. Langkah basis:
   - Tunjukkan bahwa P(0) benar.
2. Langkah Induksi:
   - Tunjukkan bahwa jika P(0) dan P(1) dan ... dan P(k) benar, maka P(k + 1) untuk setiap $k \in N$.

Contoh 3:

Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

Solusi:

Misalkan P(n): proposisi "setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 bisa dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima".

1. Langkah basis:
   - P(2) benar, karena 2 adalah hasil kali dari satu bilangan prima, dirinya sendiri.
2. Langkah induksi:
   - Asumsikan P(j) benar untuk semua bilangan bulat j, $1 < j^2k$.
   - Harus ditunjukkan bahwa P(k+1) juga benar.
   - Ada dua kasus yang mungkin:
     - Jika (k + 1) *bilangan prima*, maka jelas P(k + 1) benar.
     - Jika (k + 1) *bilangan komposit*, (k+1) dapat ditulis sebagai perkalian dua buah bilangan bulat a dan b sehingga $2 \leq a \leq b < k + 1$.

- Oleh *hipotesa induksi*, a dan b keduanya dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan prima. Jadi, $k + 1 = a \times b$ dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan prima.
- Dapat disimpulkan bahwa "Setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima".

Untuk dapat membuktikan suatu pernyataan yang melibatkan sebuah bilangan asli n dalam langkah basis dan langkah induksi, dapat ditunjukkan bahwa:

1. Pernyataan itu benar untuk $n = 1$
2. Pernyataan itu benar untuk $n = n_0$, dan
3. Pernyataan itu benar untuk $n = k+1$, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan itu benar untuk $n = k$, $(k \geq n_0)$,

maka kita dapat menyimpulkan bahwa pernyataan itu benar untuk semua bilangan asli $n \geq n_0$.

Contoh 4:

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ untuk semua $n \geq 1$.

Solusi:

Misalkan P(n) menyatakan $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ untuk semua $n \geq 1$.

1. Langkah basis:
   - Akan dibuktikan P(1) benar untuk $n = 1$.
   - Perhatikan bahwa:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

   Jadi, langkah basis benar.

2. Langkah induksi:
   - Misalkan P(k) benar, yaitu: $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ maka

akan dibuktikan P (k + 1) juga benar, yaitu:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)\,([k + 1] + 1)}{2}$$

Perhatikan bahwa:

$$= 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + k\,(k + 1) = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + k) + (k + 1)$$

$$= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k^2 + k) + 2(k + 1)}{2}$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k + 1)\,(k + 2)}{2}$$

$$= \frac{(k + 1)\,([k + 1] + 1)}{2}, \text{ untuk semua } k \geq 1$$

- Karena (1) dan (2) benar, maka terbukti bahwa $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ untuk semua $n \geq 1$, juga benar.

Contoh 5:

Buktikan bahwa $2^n > n + 20$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 5$.

Solusi:

Misalkan P(n) menyatakan $2^n > n + 20$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 5$.

1. Langkah basis:
   - Akan dibuktikan P(5) benar untuk $n = 5$.
   - Perhatikan bahwa $= 2^5 > 5 + 20$
     $= 32 > 25$
   - Jadi, basis benar.
2. Langkah induksi:
   - Misalkan P(k) benar, yaitu: $2^k > k + 20$
   - Akan dibuktikan P(k+1) juga benar yaitu: $2^{k+1} > (k + 1) + 20$
   - Perhatikan bahwa:
     $2^{k+1} = 2.2^k > 2(k + 20) = 2k + 40 > (k + 1) + 20$, untuk setiap $k \geq 5$.

- Karena (1) dan (2) benar, maka terbukti bahwa $2^n > n + 20$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 5$, juga benar.

Latihan Soal

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa:

   $$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \geq 1$$

2. Buktikan bahwa jumlah n bilangan asli kuadrat pertama adalah:

   $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \ \forall n \geq 1$$

3. Buktikan untuk setiap n bilangan asli berlaku:

   $$1 + 3^2 + 3^2 + 3^3 + \ldots\ldots + 3n^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}, \ \forall n \geq 1$$

4. Untuk setiap bilangan asli *nn* buktikan bahwa $n(n + 1)$ selalu habis dibagi 2.
5. Buktikan bahwa $n^3 + 2n$ habis dibagi 3 untuk setiap bilangan asli n.
6. Buktikan bahwa $5^n - 1$ merupakan bilangan kelipatan 4 untuk setiap bilangan asli n.
7. Buktikan bahwa:

   $$1x2 + 2x3 + 3x4 + \ldots\ldots + nx(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

8. Untuk setiap bilangan asli n buktikan bahwa bentuk $2^{4n-3} + 3^{3n+1}$ habis dibagi oleh 11.

4
KOMBINATORIK

A. STANDAR KOMPETENSI

Mahasiswa dapat menganalisis konsep kombinatorik dan dapat memanfaatkannya untuk menyelesaikan permasalahan di berbagai bidang ilmu.

B. KOMPETENSI DASAR

Menjelaskan konsep kombinatorik, menerapkan dan merancangnya di berbagai disiplin ilmu.

C. INDIKATOR

1. Mahasiswa dapat menganalisis kaidah pencacahan dalam masalah nyata.
2. Mahasiswa dapat menerapkan prinsip inklusi-eksklusi dalam masalah nyata.
3. Mahasiswa dapat teorema Binomial ke dalam masalah nyata.

4.1 PENGERTIAN KOMBINATORIK

Persoalan kombinatorik banyak ditemukan dalam kehidupan nyata dan telah diselesaikan secara sederhana dalam masyarakat. Misalkan, saat pemilihan pemain untuk tim sepak bola yang terdiri dari 11 pemain. Apabila ada 20 orang ingin membentuk suatu tim sepak bola, ada berapa kemungkinan komposisi pemain yang dapat terbentuk? Pada Bab ini, kita akan membahas tentang kombinatorik.

Definisi 4: Kombinatorik

Cabang Ilmu Matematika yang mempelajari tentang pengaturan objek-objek tanpa harus mengemunerasi semua kemungkinan susunannya.

4.2 PRINSIP DASAR MENGHITUNG

Dua prinsip dasar yang digunakan dalam menghitung adalah aturan pejumlahan dan aturan perkalian.

a. Prinsip Penjumlahan

Jika suatu himpunan P terbagi kedalam himpunan bagian P_1, P_2, ..., P_n, maka jumlah unsur pada himpunan P akan sama dengan jumlah semua unsur yang ada pada setiap himpunan bagian P_1, P_2, ..., P_n.

Secara tidak langsung, pada prinsip penjumlahan, setiap himpunan bagian P_1, P_2, ..., P_n tidak saling lepas. Untuk himpunan yang saling lepas tidak berlaku bagi prinsip penjumlahan, dan ini harus diselesaikan dengan prinsip inklusi-eksklusi.

Contoh 1:

Seorang guru di daerah X, mengajar siswa kelas 1, kelas 2, dan kelas 3. Jika jumlah siswa kelas 1 adalah 20 orang dan jumlah siswa kelas 2 adalah 25 orang serta jumlah siswa kelas 3 adalah 22 orang, maka jumlah siswa yang diajar guru tersebut adalah 20 + 25 + 22 = 67 siswa.

Contoh 2:

Seorang mahasiswa ingin membeli sebuah sepeda motor. Ia dihadapkan untuk memilih satu jenis dari tiga merek sepeda motor yaitu Honda 4 pilihan, Suzuki 3 pilihan, dan Yamaha 4 pilihan. Dengan demikian, mahasiswa tersebut mempunyai mempunyai pilihan sebanyak 4 + 3 + 4 = 11 pilihan.

b. Prinsip Perkalian

Misalkan sebuah prosedur dapat dipecah dalam dua penugasan. Penugasan pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara, dan tugas kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara setelah tugas pertama dilakukan. Dengan demikian, dalam mengerjakan prosedur tersebut ada (n_1 x n_2) cara.

Secara tidak langsung, pada prinsip perkalian, bisa terjadi saling tumpang-tindih (tidak saling lepas).

Contoh 3:

Berapa banyak string dengan panjang tujuh yang mungkin terbentuk dari dua bit (0 dan 1).

Jawab:

Setiap suku pada string tersebut mempunyai dua cara pemilihan, yaitu 0 atau 1. Dengan demikian, pada pemilihan string dengan panjang tujuah dapat dilakukan dengan:

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$

$= 128$ cara.

Contoh 4:

Seorang guru SD di daerah, mengajar murid kelas 4, kelas 5 dan kelas 6. Misalkan, jumlah murid kelas 4 adalah 25 orang dan jumlah murid kelas 5 adalah 27 orang serta jumlah murid kelas 6 adalah 20 orang. Jika guru tersebut ingin memilih tiga orang murid dari anak didiknya, di mana seorang murid dari setiap kelas, maka guru tersebut mempunyai $25 \times 27 \times 20 = 13.500$ cara dalam memilih susunan tiga murid tersebut.

Contoh 5:

Password suatu login pada sistem komputer panjangnya lima sampai tujuh karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf (huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan) atau angka. Berapa banyak *password* yang dapat dibuat untuk suatu *login*?

Jawab:

Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A – Z) dan banyak angka adalah 10 (0 – 9), jadi seluruhnya 36 karakter.

Untuk *password* dengan panjang 5 karakter, jumlah kemungkinan *password* yaitu:

$= (36)(36)(36)(36)(36) = 36^5$

$= 60.466.176$

Untuk *password* dengan panjang 6 karakter, jumlah kemungkinan *password*, yaitu:

= (36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6

= 2.176.782.336

Dan untuk *password* dengan panjang 8 karakter, jumlah kemungkinan *password*, yaitu:

= (36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7

= 78.364.164.096

Jumlah seluruh *password* yang mungkin yaitu:

= 60.466.176 + 2.176.782.336 + 78.364.164.096

= 80.601.412.608 buah.

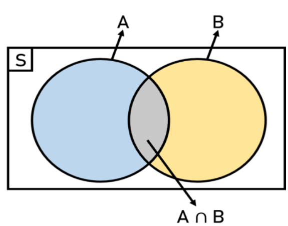
Jadi, untuk suatu login akan mempunyai 80.601.412.608 buah kemungkinan *password*.

4.3 PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

Ketika dua proses dikerjakan dalam waktu yang sama, kita tidak bisa menggunakan prinsip penjumlahan untuk menghitung jumlah cara untuk memilih salah satu dari dua proses tersebut. Untuk menghitung proses tersebut, kita harus mengenal prinsip inklusi-eksklusi. Prinsip Inklusi dan Eksklusi merupakan perluasan ide dalam Diagram Venn beserta operasi irisan dan gabungan.

a. Prinsip Inklusi-Eksklusi 2 Himpunan

Banyaknya anggota 2 himpunan gabungan antara himpunan A dan himpunan B merupakan jumlah banyaknya anggota dalam himpunan tersebut dikurangi banyaknya anggota di dalam irisan.



$n(A \cup B) = [n(A) + n(B)] - n(A \cap B)$
Inklusi: $S_1 = n(A) + n(B)$
Eksklusi: $S_2 = n(A \cap B)$

Contoh 6:

Kelas X terdiri dari 31 siswa. Sebanyak 15 siswa mengikuti kompetisi matematika, 13 siswa mengikuti kompetisi IPA, dan 7 siswa tidak mengikuti kompetisi tersebut. Banyak siswa yang mengikuti kedua kompetisi tersebut adalah

Solusi:

Misalkan A menyatakan himpunan siswa yang mengikuti kompetisi matematika, sedangkan B kompetisi IPA, serta S himpunan semesta, maka dapat ditulis:

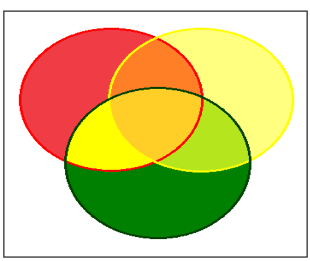
$n(S) = 31$
$n(A) = 15$
$n(B) = 13$
$n(A \cup B)^c = 7$
$n(A \cup B) = n(S) - n(A \cup B)^c = 31 - 7 = 24$

Sehingga:

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 15 + 13 - 24 = 28 - 24 = 4$

b. Prinsip Inklusi-Eksklusi 3 Himpunan

Banyaknya anggota 2 himpunan gabungan antara himpunan A dan himpunan B merupakan jumlah banyaknya anggota dalam himpunan tersebut dikurangi banyaknya anggota di dalam irisan.



$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)] - n(A \cap B \cap C)$

Inklusi: $S_1 = n(A) + n(B) + n(C)$
Eksklusi: $S_2 = n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$
Inklusi: $S_3 = n(A \cap B \cap C)$

Contoh 7:

Dari sekelompok anak terdapat 20 anak gemar voli, 28 anak gemar basket, dan 27 anak gemar pingpong, 13 anak gemar voli dan basket, 11 anak gemar basket dan pingpong, 9 anak gemar voli dan pingpong, serta 5 anak gemar ketiga-tiganya. Jika dalam kelompok tersebut ada 55 anak, banyak anak yang tidak gemar satu pun dari ketiga jenis permainan tersebut adalah...

Solusi:

Misalkan V, B, dan P berturut-turut menyatakan himpunan anak yang menggemari voli, basket, dan pingpong. Himpunan S menyatakan himpunan seluruh anak di kelompok tersebut. Diketahui:

$n(S) = 55$
$n(V) = 20$
$n(B) = 28$
$n(P) = 27$
$n(V \cap B) = 13$
$n(B \cap P) = 11$
$n(V \cap P) = 9$
$n(V \cap B \cap P) = 5$

Inklusi $= S_1 = n(V) + n(B) + n(P) = 20 + 28 + 27 = 75$
Eksklusi $= S_2 = n(V \cap B) + n(B \cap P) + n(V \cap P) = 13 + 11 + 9 = 33$
Inklusi $= S_3 = n(V \cap B \cap P) = 5$

$n(A \cup B \cup C) =$ inklusi – eksklusi + inklusi
$n(S) - x = 75 - 33 + 5$
$55 - x = 47$
$x = 55 - 47 = 8$

4.4 TEOREMA BINOMIAL

Teorema binomial memberikan bentuk ekspansi dari perpangkatan $(a + b)^n$, untuk setiap n bilangan bulat tidak negatif dan semua bilangan real a dan b.

Jika kita akan melakukan proses perhitungan dari beberapa nilai n bilangan bulat, maka diperoleh:

$$(a + b)^0 = 1$$
$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2b + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} b^n$$

Dengan demikian, formulasi untuk teorema Binomial dinyatakan sebagai:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dari formulasi teorema Binomial diperoleh koefisien Binomial:

$$\binom{n}{k}$$

Contoh 8:

Dengan menggunakan teorema binomial, tunjukkan bahwa

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n}$$

untuk semua bilangan bulat $n \geq 0$.

Solusi:

Karena $2 = 1 + 1$, maka $2^n = (1 + 1)^n$. Dengan menerapkan teorema binomial dengan $a = 1$ dan $b = 1$, diperoleh:

$$2^n = (1 + 1)^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k$$

Karena $1^{n-k} = 1$ dan $1^k = 1$. Akibatnya,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n}$$

Latihan Soal

1. Sebanyak 115 mahasiswa mengambil matakuliah Matematika Diskrit, 71 Kalkulus Peubah Banyak, dan 56 Geometri. Di antaranya, 25 mahasiswa mengambil Matematika Diskrit dan Kalkulus Peubah Banyak, 14 Matematika Diskrit dan Geometri, serta 9 orang mengambil Kalkulus Peubah Banyak dan Geometri. Jika terdapat 250 mahasiswa yang mengambil paling sedikit satu dari ketiga matakuliah tersebut, berapa orang yang mengambil ketiga matakuliah sekaligus?
2. Carilah banyaknya anggota dari $|A \cup B \cup C|$ jika terdapat 100 anggota dalam setiap himpunan dan jika,
   a. ketiga himpunan tersebut tidak ada yang saling beririsan
   b. terdapat 50 anggota yang sama dalam setiap pasang himpunan dan tidak ada anggota yang sama dalam ketiga himpunan sekaligus
   c. terdapat 50 anggota yang sama dalam setiap pasang himpunan dan 25 anggota yang sama dalam ketiga himpunan sekaligus
   d. irisan setiap pasang himpunan dan irisan ketiga himpunan berukuran sama

3. Carilah banyaknya anggota dari $|A \cup B \cup C \cup D|$ jika setiap himpunan berukuran 80, setiap irisan dari dua himpunan berukuran 40, setiap irisan dari tiga himpunan berukuran 20, dan irisan dari keempat himpunan berukuran 4.
4. Tentukan banyaknya bilangan prima yang tidak melebihi 100.
5. Bila disusun dimulai dari suku dengan variabel berpangkat tertinggi, tentukan suku keenam dari ekspansi $(2x^{½} - 14x^{¼})^9$!
6. Tentukan banyaknya suku yang mengandung ekspresi x^7 dari ekspansi $(3x^2 - 2y^3)^8$!
7. Tentukan koefisien suku yang mengandung x^{14} dari ekspansi $(x^2 + 2y^3)^{10}$!
8. Tentukan konstanta dari hasil penjabaran $(3x^2 - 2y^4)^7$!

5

TEORI GRAF

A. STANDAR KOMPETENSI

Mahasiswa dapat menjelaskan konsep-konsep dalam teori graf dan dapat menerapkannya untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan bidang ilmu lainnya maupun dalam kehidupan sehari-hari.

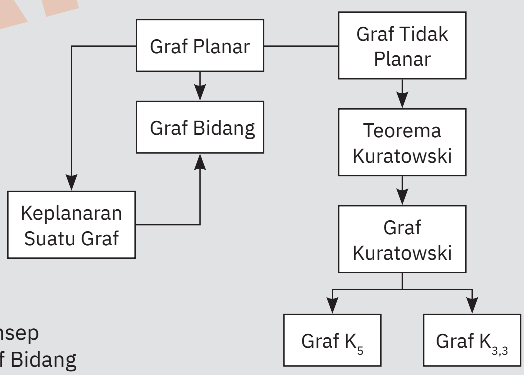
B. KOMPETENSI DASAR

Menjelaskan, mengidentifikasi, dan memberikan contoh graf planar dan graf bidang.

C. INDIKATOR

1. Mahasiswa dapat menganalisis tentang graf planar dan graf bidang secara matematika melalui proses analogi dengan memperhatikan syarat/ketentuan dari graf tersebut.
2. Mahasiswa dapat memberikan penjelasan tentang ketidakplanaran dari suatu graf dengan menggunakan teorema Kuratowski dan menarik kesimpulan secara logis.

D. SKEMA HUBUNGAN MATERI PERKULIAHAN



Gambar 9. Peta Konsep
Graf Planar dan Graf Bidang

5.1 PENGERTIAN GRAF PLANAR

Definisi 5: Keplanaran Suatu Graf

Sebuah Graf disebut Graf Planar apabila digambarkan pada bidang datar akan menghasilkan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan. Graf Planar akan menghasilkan Graf Bidang, di mana pada graf bidang menghasilkan sejumlah wilayah/region.

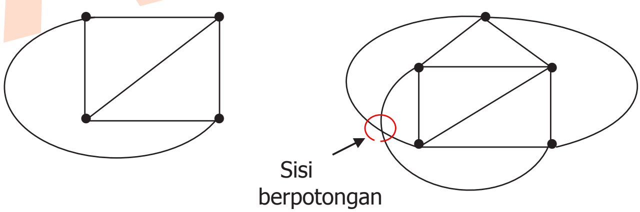
Untuk menentukan jumlah wilayah/region dari sebuah graf bidang dapat digunakan rumus Euler, yang didefinisikan sebagai:

$f = e - n + 2$ di mana: f = jumlah wilayah
e = jumlah sisi
n = jumlah simpul

Contoh 1:

Dengan mudah dapat kita gambarkan bahwa K_1; K_2; dan K_3 adalah graf planar. Jelaskan bagaimana menunjukkan bahwa K_4 planar, sedangkan K_5 tidak planar.

Jawab:



(a) K_4 (b) K_5

Gambar (a) cukup menunjukkan bahwa K_4 adalah planar. Gambar (b) menunjukkan bahwa K_5 tidak planar. Usaha untuk menggambarkan bahwa K_5 adalah planar hanya sampai pada 9 edge pertama, sedangkan edge yang ke-10 tidaklah mungkin digambarkan tanpa memotong edge salah satu dari 9 edge yang pertama.

5.2 RUMUS KETAKSAMAAN EULER

Definisi 6: Rumus Ketaksamaan Euler

Keplanaran suatu graf sederhana dapat dibuktikan dengan menggunakan rumus Ketidaksamaan Euler*, jika graf planar, maka graf memenuhi ketidaksamaan Euler, sebaliknya jika tidak planar maka rumus ketidaksamaan Euler tersebut tidak dipenuhi.

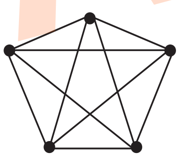
Rumus ketidaksamaan Euler, sebagai berikut:

$e \leq 3n - 6$ di mana: e = jumlah sisi
n = jumlah simpul

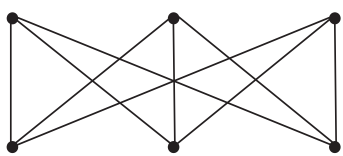
* Rumus ketidaksamaan Euler tidak menjamin keplanaran suatu graf.

Contoh 2:

Untuk graf K_5 dan graf $K_{3,3}$ dibawa ini, selidiki apakah graf tersebut planar dengan menggunakan rumus Ketidaksamaan Euler! Gunakan analisa jawaban anda! Bagaimana untuk graf teratur lainnya, seperti graf K_6 dan graf $K_{4,4}$!



(a) Graf K_5



(b) Graf $K_{3,3}$

Jawab:

Untuk graf (a), dengan menggunakan rumus ketidaksamaan Euler diperoleh:

$= e \leq 3n - 6$

$= 10 \leq 3.5 - 6$

$= 10 \leq 15 - 6$

$= 10 \leq 9$

Dari hasil tersebut menunjukkan bahwa graf K_5 tidak planar

Untuk graf (b), dengan menggunakan rumus ketidaksamaan Euler diperoleh:

$= e \leq 3n - 6$

$= 9 \leq 3.6 - 6$

$= 10 \leq 18 - 6$

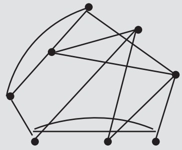
$= 10 \leq 12$

Dari hasil tersebut menunjukkan bahwa graf $K_{3,3}$ planar. Hasilnya menunjukkan keadaan yang tidak sebenarnya bahwa $K_{3,3}$ tidak planar.

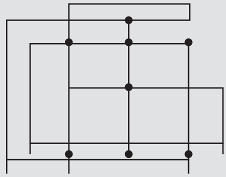
Jadi, rumus ketidaksamaan Euler tidak menjamin keplanaran dari suatu graf. Untuk graf K_5 dan graf $K_{3,3}$ silakan Anda coba sendiri!

Latihan Soal

1. Bagaimana hubungan dari graf planar dengan graf bidang? Berikan jawaban Saudara!
2. Perhatikan graf berikut ini:



(a)

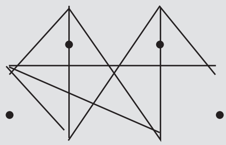


(b)

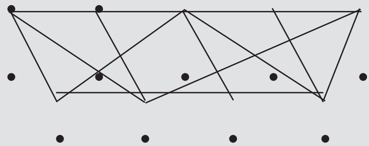
Saudara dapat mengamati dan menganalisa gambar (a) dan (b), apa yang dapat saudara nyatakan dari kedua gambar tersebut, apakah kedua graf tersebut graf planar dan graf bidang! Berikan jawaban saudara!

3. Perhatikan graf berikut ini:

(a)



(b)



Gambarkan graf tersebut sedemikian sehingga menghasilkan sisi-sisi tidak saling berpotongan! Bagaimana jawaban Saudara terhadap hasil gambar tersebut!

5.3 TEOREMA KURATOWSKI

Definisi 7: Teorema Kuratowski

Untuk mempertegas ketidakplanaran suatu graf sederhana dapat dibuktikan dengan menggunakan teorema Kuratowski.

Teorema Kuratowski:

a. Graf G tidak planar jika dan hanya jika memuat subgraf yang isomorfik dengan graf Kuratowski yaitu K_5 atau $K_{3,3}$.

b. Graf G tidak planar jika dan hanya jika memuat subgraf yang homeomorfik dengan graf Kuratowski yaitu Graf K_5 atau $K_{3,3}$.

Sifat-sifat graf Kuratowski di antaranya:

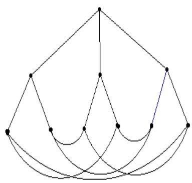
a. Merupakan graf teratur

b. Graf K_5 dan Graf $K_{3,3}$ adalah graf tidak planar

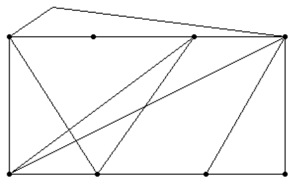
c. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski akan menyebabkan menjadi graf Planar.

Contoh 3:

Periksalah apakah kedua graf di bawah ini tidak planar dengan menggunakan teorema kuratowski. Berikan alasan Anda!



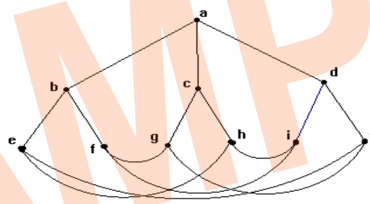
(A)



(B)

Jawab:

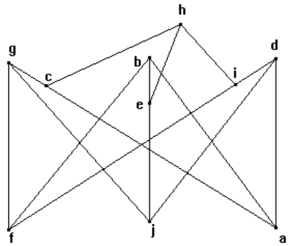
Untuk memeriksa apakah graf A planar atau tidak planar, maka terlebih dahulu setiap simpul diberi label pada graf A seperti pada gambar di bawah ini.



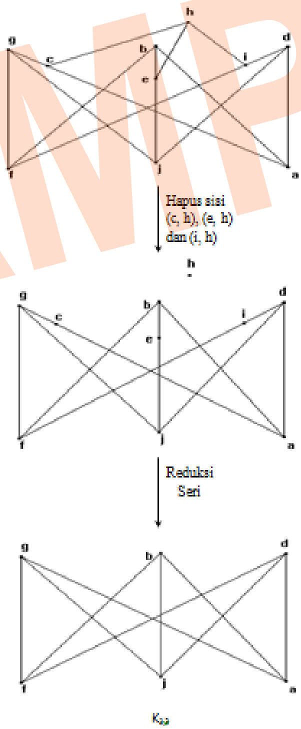
(A)

Untuk menganalisis apakah graf A planar atau tidak planar, maka dapat digunakan Teorema Kuratowski. Dalam menentukan apakah graf A planar atau tidak planar dengan menggunakan teorema Kuratowski, maka dapat dilakukan dengan cara menemukan subgraf K_5 atau $K_{3,3}$ pada graf A.

Pertama kali kita ingat bahwa masing-masing simpul *a, b, c, d, e, f, g, h, i,* dan *j* pada graf A yang telah dilabeli pada gambar di atas, masing-masing mempunyai derajat 3. Kita ketahui bahwa, dalam masing-masing simpul pada graf $K_{3,3}$ memiliki derajat 3, sedangkan setiap simpul pada graf K_5 memiliki derajat 4. Ini berarti, hanya subgraf yang isomorfik dengan graf $K_{3,3}$ yang dapat ditemukan. Untuk itu kita coba menemukan subgraf yang isomorfik dengan garf $K_{3,3}$ dalam graf A, karena setiap simpul dalam graf $K_{3,3}$ mempunyai derajat 3, sehingga kita akan melakukannya sebagai berikut:



$K_{3,3}$ setiap titik mempunyai derajat 3, kita dapat menghapus sisi *(c, h), (e, h) dan (i, h)* seperti tampak pada gambar di bawah ini:

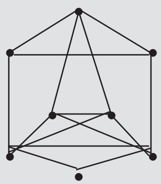


Kemudian, kita dapat menghapus setiap simpul yang berderajat dua, di antaranya simpul *c*, *e*, dan *i*.

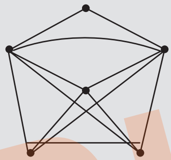
Untuk graf B, silahkan saudara diskusikan jawabannya!

Latihan Soal

1. Perhatikan graf berikut, tunjukkan dengan menggunakan teorema Kuratowski bahwa graf berikut tidak planar!



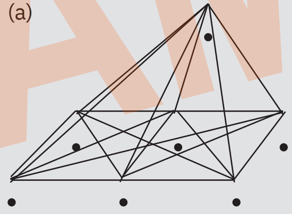
(a)



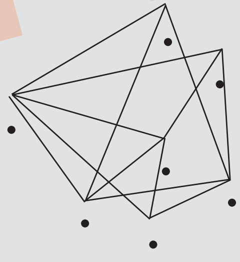
(b)

2. Apakah graf berikut planar, berikan alasannya dengan menggunakan teorema Kuratowski?

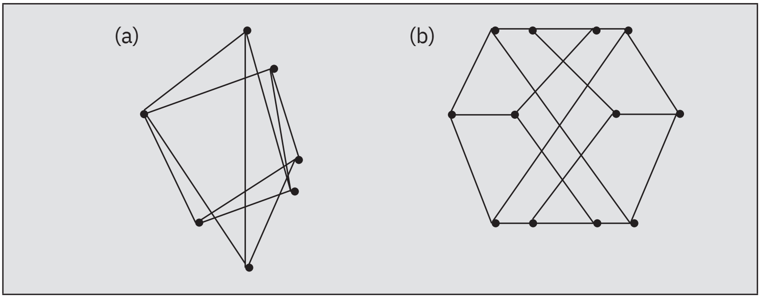
(a)



(b)



3. Jika diberikan sembarang graf sederhana, sebagai berikut: G = (V, E); V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; E = {(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,6), (3,5), (3,6), (4,6), (5,6)} Apakah graf G tersebut merupakan graf planar? Jika iya, gambarkanlah grafnya (tanpa adanya egde yang saling bersilangan).
4. Diketahui graf sebagai berikut, buktikan dengan teorema Kuratowski bahwa graf tersebut tidak planar.


(a)
(b)

6

PEWARNAAN GRAF

A. STANDAR KOMPETENSI

Mahasiswa dapat menjelaskan konsep-konsep dalam teori graf dan dapat menerapkannya untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan bidang ilmu lainnya maupun dalam kehidupan sehari-hari.

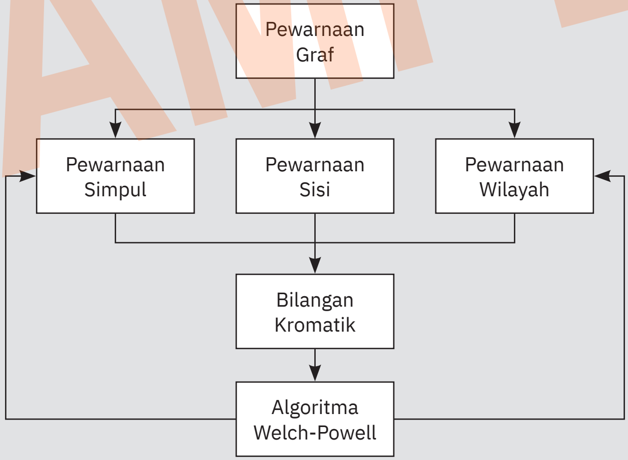
B. KOMPETENSI DASAR

Menjelaskan, mengidentifikasi, dan memberikan contoh graf planar dan graf bidang.

C. INDIKATOR

Mahasiswa dapat menyusun konjektur terhadap penentuan jumlah warna pada simpul dan menarik kesimpulan secara logis.

D. SKEMA HUBUNGAN MATERI PERKULIAHAN



Gambar 10. Peta Konsep untuk Pewarnaan Graf

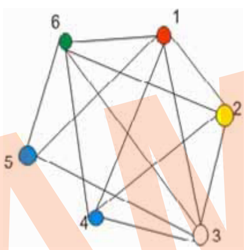
6.1 PEWARNAAN SIMPUL

Definisi 7: Pewarnaan Simpul

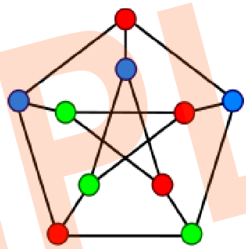
Pewarnaan simpul (*vertex colouring*) adalah memberi warna seminimal mungkin pada simpul sedemikian hingga untuk setiap dua simpul bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Contoh 1:

Perhatikan kedua graf di bawah ini, tentukan berapa banyak jumlah warna untuk kedua graf tersebut pada gambar berikut ini.



(a)



(b)

Jawab:

Dengan memberikan warna pada Graf (a) dan (b) untuk masing-masing simpul sedemikian hingga dua simpul yang saling bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Jumlah warna pada gambar (a) adalah 5 dan jumlah warna pada gambar (b) adalah 3.

Coba Anda gambarkan sebuah graf dengan jumlah simpul = 7 dan jumlah sisi = 13, selanjutnya beri warna pada masing-masing simpul!

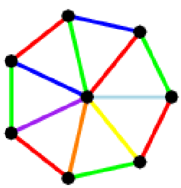
6.2 PEWARNAAN SISI

Definisi 8: Pewarnaan Sisi

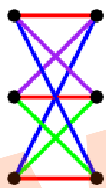
Pewarnaan sisi (*edge coloring*) adalah memberi warna berbeda pada sisi yang bersisian sehingga tidak ada dua sisi yang bersisian mempunyai warna yang sama.

Contoh 2:

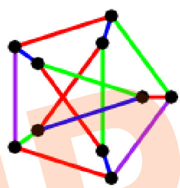
Perhatikan graf berikut ini:



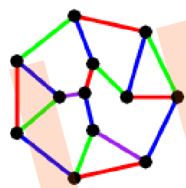
(a)



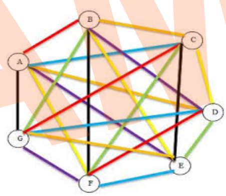
(b)



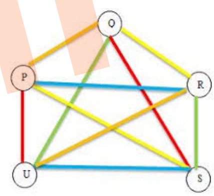
(c)



(d)



(e)



(f)

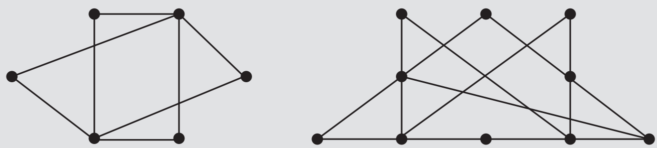
Jawab:

Gambar (a) – (f) merupakan pewarnaan sisi pada masing-masing graf tersebut. Pewarnaan dilakukan dengan cara memberikan warna pada masing-masing graf tersebut untuk setiap sisi sedemikian hingga dua sisi yang saling bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Pada gambar 3(a) memiliki jumlah warna = 4, gambar 3(b) memiliki jumlah warna = 3, gambar 3(c), (d) masing-masing memiliki jumlah warna = 3, gambar 3(e) dan (f) memiliki jumlah warna = 5

Gambarkan sebuah graf sederhana yang terdiri dari 11 simpul dan 18 sisi. Beri warna pada masing-masing sisi untuk graf tersebut.

Latihan Soal

1. Tentukan jumlah warna minimum pada graf berikut ini:



(a) (b)

2. Perhatikan tabel berikut yang menggambarkan tentang matriks mahasiswa dan matakuliah.

		Matakuliah				
		A	**B**	**C**	**D**	**E**
Mahasiswa	**1**	0	1	0	0	1
	2	0	1	0	1	0
	3	0	0	1	1	0
	4	1	1	0	0	0
	5	0	1	0	1	0
	6	0	1	1	0	0
	7	1	0	1	0	0
	8	0	0	1	1	0

Angka 1 sebagai elemen *(i,j)* yang menunjukkan mahasiswa *i* memilih matakuliah *j*, sedangkan angka 0 sebagai elemen *(i,j)* mahasiswa *i* tidak memilih matakuliah *j*.
Berdasarkan tabel di atas, tentukan banyak jadwal ujian yang dapat dibuat sedemikian rupa sehingga semua mahasiswa dapat mengikuti ujian pada matakuliah yang diambilnya tanpa ada kesulitan waktu (mahasiswa dapat mengikuti ujian lebih dari satu matakuliah pada waktu yang bersamaan).

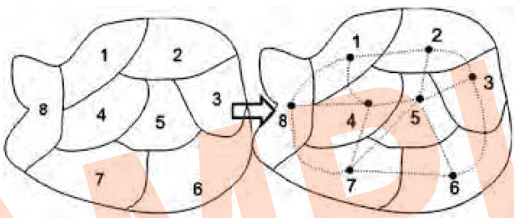
6.3 PEWARNAAN WILAYAH

Definisi 9: Pewarnaan Wilayah

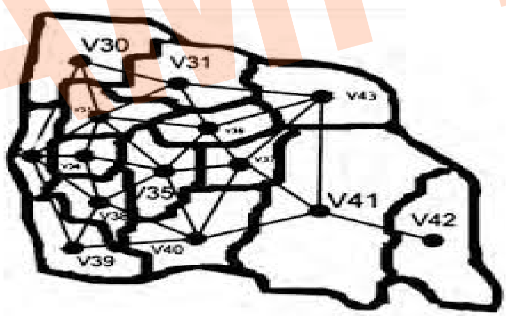
Pewarnaan wilayah (*region coloring*) adalah memberi warna berbeda pada wilayah yang terhubung langsung sehingga tidak ada dua wilayah yang bertetangga mempunyai warna yang sama.

Contoh 3:

Perhatikan graf berikut ini:



(a)



(b)

Jawab:

Kedua graf pada gambar (a) dan (b) merupakan graf bidang yang masing-masing terdiri dari 6 wilayah dan 14 wilayah. Pemberian warna pada setiap wilayah pada graf dapat dilakukan sebagai berikut (tampak seperti pada gambar 4(a) dan 4(b) : Langkah pertama yang dilakukan pada pewarnaan wilayah adalah dengan memberikan simpul pada masing-masing wilayah. Kemudian masing-masing simpul diberi label dan simpul-simpul yang telah diberi label tersebut dihubungkan sedemikian hingga antara dua simpul yang bertetangga saling terhubung. Kemudian setiap simpul diberi warna sedemikian hingga dua simpul yang saling bertetangga tidak diberi warna yang sama.

Coba Anda gambarkan sebuah graf bidang yang terdiri dari 10 wilayah dan berapa banyak jumlah warna pada setiap wilayah yang dapat diberikan pada graf tersebut!

> Jumlah warna minimum pada simpul, sisi dan wilayah disebut bilangan khromatik yang dilambangkan dengan $\chi(G)$.

Cara lain yang digunakan untuk memberi sejumlah warna pada simpul-simpul dari suatu graf, dapat dilakukan dengan menggunakan algoritma **Welch Powell**. Proses pemberian warna pada algoritma Welch Powell menggunakan langkah-langkah berikut:

Langkah 1 (memberi label pada simpul dan menentukan jumlah derajatnya). Label simpul $v_1, v_2, \ldots, v_n$, kemudian urutkan simpul sedemikian hingga derajat (v_1) > derajat (v_2) >... > derajat (v_n).

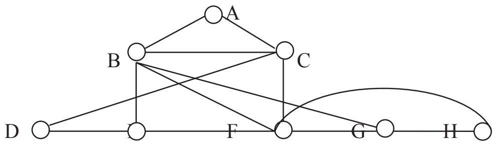
Langkah 2 (beri warna pada simpul pertama dengan derajat paling tinggi), dan beri warna yang sama pada simpul yang tidak bertetangga dengan simpul pertama.

Langkah 3 Jika beberapa simpul belum diberi warna, maka kembali ke langkah 2.

Langkah 4 Pewarnaan graf selesai dan dapat ditentukan bilangan kromatiknya.

Contoh 4:

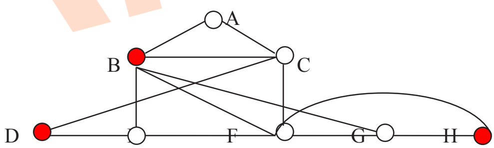
Berilah warna pada Graf berikut ini dengan menggunakan algoritma Welch-Powell.



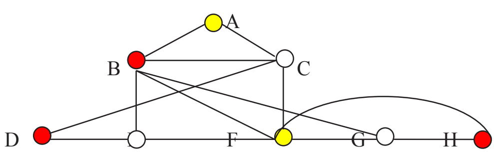
Urutkan simpul berdasarkan derajatnya dari besar ke kecil. Simpul berderajat terbesar adalah B, dan F masing-masing berjumlah 5, kemudian simpul C berderajat 4, E dan G masing-masing berderajat 3 dan A,D dan H masing-masing berderajat 2. Jadi urutannya, yaitu:

Simpul	B F C E G A D H
Derajat	5 5 4 3 3 2 2 2

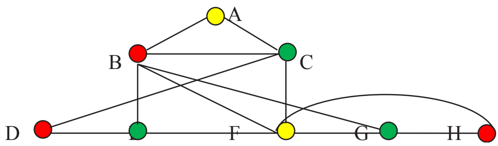
Beri warna pada simpul yang berderajat terbesar pertama, yaitu simpul B dengan warna Merah. Beri warna yang sama (warna merah) ke simpul yang ***tidak bertetangga*** dengan simpul B.



Selanjutnya beri warna pada simpul yang berderajat terbesar kedua, yaitu simpul F dengan warna Kuning. Beri warna yang sama (warna kuning) ke simpul yang ***tidak bertetangga*** dengan simpul F.



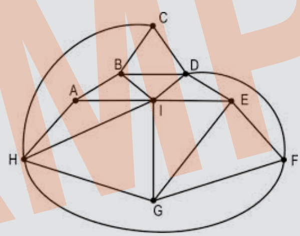
Selanjutnya beri warna pada simpul yang berderajat terbesar ketiga, yaitu simpul C dengan warna Hijau. Beri warna yang sama (warna hijau) ke simpul yang ***tidak bertetangga*** dengan simpul C.



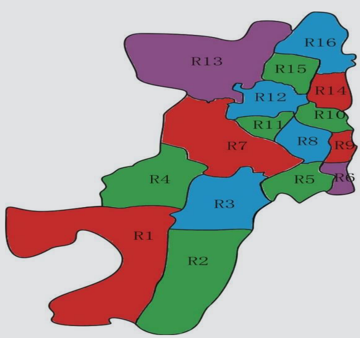
Pewarnaan pada simpul telah selesai dan diperoleh bilangan khromatik pada graf tersebut adalah $\chi(G) = 3$.

Latihan Soal

1. Tentukan jumlah warna minimum pada graf berikut ini :



2. Tentukan jumlah warna minimum pada peta berikut ini:



3. Ada 6 jenis zat kimia yang perlu disimpan di gudang. Beberapa pasang dari zat itu tidak dapat disimpan di tempat yang sama, karena campuran gasnya bersifat eksplosif. Untuk zat-zat semacam itu perlu dibangun ruang-ruang terpisah yang dilengkapi ventilasi dan penyedot udara ke luar yang berlainan. Jika lebih banyak ruang dibutuhkan, berarti lebih banyak biaya yang dikeluarkan. Karena itu perlu diketahui berapa banyak minimum ruangan yang diperlukan untuk dapat menyimpan semua zat kimia itu dengan aman. Berikut ini adalah daftar pasangan zat kimia yang tidak dapat disimpan di tempat yang sama.

Zat kimia	Tidak dapat bersama dengan zat kimia
A	B, D
B	A, D, E, F
C	E
D	A, B, F
E	B, C
F	B, D

Berapa banyak minimum ruangan berbeda untuk menyimpan semua zat kimia itu secara aman?

4. Berapa banyak channel berbeda yang dibutuhkan untuk 6 lokasi stasiun pada jarak yang ditunjukkan pada tabel berikut, jika 2 stasiun tidak dapat digunakan pada channel yang sama ketika berada dalam jarak 150 mil satu sama lain?

5. Gambarkan graf sederhana yang terdiri dari :
   a. 7 simpul 12 sisi
   b. 9 simpul 16 sisi

   Tentukan jumlah warna minimum pada simpul, dan sisi.

7

GRAF POHON

A. STANDAR KOMPETENSI:

Mahasiswa dapat menjelaskan konsep-konsep dalam teori graf dan dapat menerapkannya untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan bidang ilmu lainnya maupun dalam kehidupan sehari-hari.

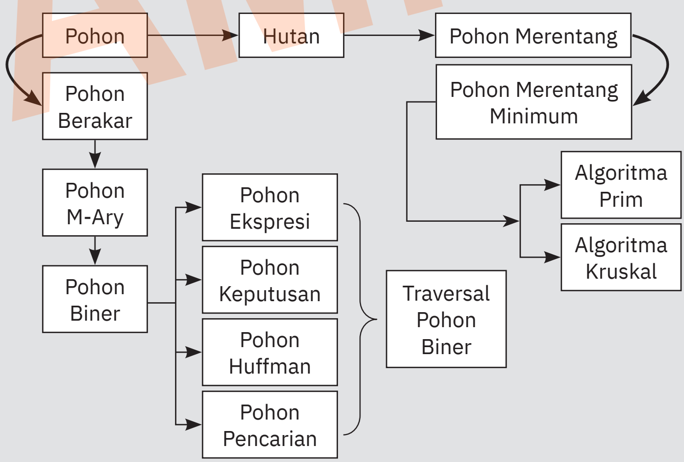
B. KOMPETENSI DASAR

Menjelaskan, mengidentifikasi, dan memberikan contoh graf planar dan graf bidang.

C. INDIKATOR

1. Mahasiswa dapat melakukan proses analogi dalam menentukan pohon ekspresi.
2. Mahasiswa dapat menganalisis atau memperkirakan jawaban permasalahan traversal pohon biner berdasarkan pola atau unsur yang diketahui.

D. SKEMA HUBUNGAN MATERI PERKULIAHAN



Gambar 11. Peta Konsep untuk Konsep Pohon

7.1 PENGERTIAN POHON

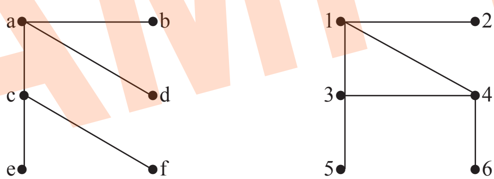
Definisi 10: Pohon

Pohon merupakan bentuk khusus dari suatu graf yang memiliki 3 kriteria yaitu tak berarah, terhubung dan tidak memiliki sirkuit.

Karakteristik pohon:

1. *G* adalah pohon.
2. Setiap pasang simpul di dalam *G* terhubung dengan lintasan tunggal.
3. *G* terhubung, tidak mengandung sirkuit dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
4. *G* tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf akan membuat hanya satu sirkuit.
5. *G* terhubung dan semua sisinya adalah jembatan.

Contoh 1:



(a) (b)

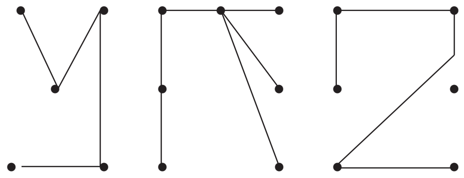
Gambar Pohon dan Bukan Pohon

Gambar (a) merupakan pohon, karena tidak memiliki sirkuit dan memiliki jumlah sisi pada graf tersebut m = n – 1, yaitu 6 – 1 = 5. Adapun gambar (b) bukan merupakan pohon, karena memiliki sirkuit (1 3 4 1) dan jumlah sisi pada graf tersebut m ≠ n – 1.

Definisi 11:

Kumpulan dari beberapa pohon menghasilkan hutan (*forest*)

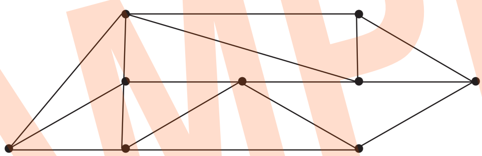
Contoh 2:



Gambar Hutan (*Forest*)

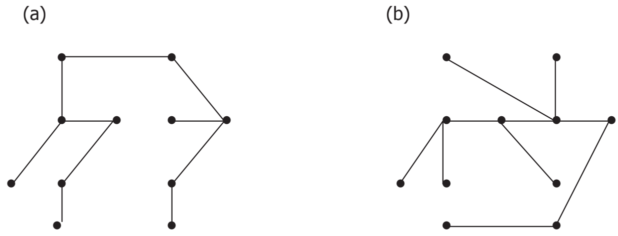
> **Definisi 12**:
> Suatu pohon merentang (*spanning tree*) adalah suatu subgraf dari graf G yang mengandung semua simpul dari G dan merupakan suatu pohon.

Contoh 3:



Gambar Graf Terhubung dan Sederhana

Banyak subgraf (pohon merentang) dari graf tersebut adalah:



Gambar Subgraf/Pohon Merentang

Anda dapat lakukan untuk mencari subgraf lainnya dari graf tersebut!

7.2 POHON MERENTANG DAN MERENTANG MINIMUM

Definisi 13:
Apabila G merupakan graf berbobot, maka bobot pada pohon merentang T dari graf tersebut didefinisikan sebagai jumlah bobot semua sisi di T.
Pohon merentang yang berbeda mempunyai bobot yang berbeda pula. Pohon merentang yang berbobot minimum di antara semua pohon merentang disebut sebagai pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*).

Dalam membentuk pohon merentang minimum dapat digunakan pendekatan algoritma Prim dan algoritma Kruskal. Perbedaan prinsip antara algoritma Prim dan Kruskal adalah jika pada algoritma Prim sisi yang dimasukkan ke dalam T harus bersisian dengan sebuah simpul di T, maka pada algoritma Kruskal sisi yang dipilih tidak perlu bersisian dengan simpul di T asalkan penambahan sisi tersebut tidak membentuk sirkuit.

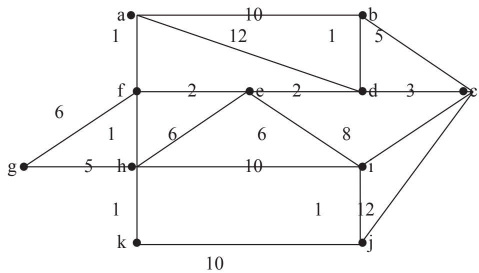
a. Algoritma Prim

Algoritma Prim adalah sebuah algoritma dalam teori graf untuk mendapatkan pohon merentang minimum dari sebuah graf yang diberikan. Algoritma ini ditemukan pada 1930 oleh seorang matematikawan Voljtech Jarnik, dan lalu secara terpisah oleh ahli computer Robert C. Prim di tahun 1957 kemudian dikembangkan lagi oleh Dijkstra pada 1959. Berikut ini adalah langkah-langkah dalam algoritma Prim:

- **Langkah 1**: Pilih sisi dari graf G yang berbobot minimum, masukkan ke dalam T.
- **Langkah 2**: Pilih sisi e yang mempunyai bobot minimum yang bersisian dengan simpul di T, dan e tidak membentuk sirkuit di T. Masukkan e ke dalam T.
- **Langkah 3**: Ulangi langkah 2 sebanyak n-2 kali.

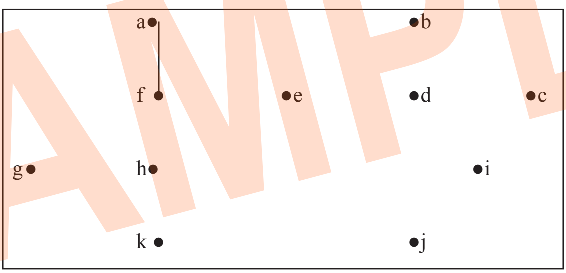
Contoh 4:

Gunakan algoritma Prim untuk menentukan pohon merentang minimum dari graf berbobot berikut ini:



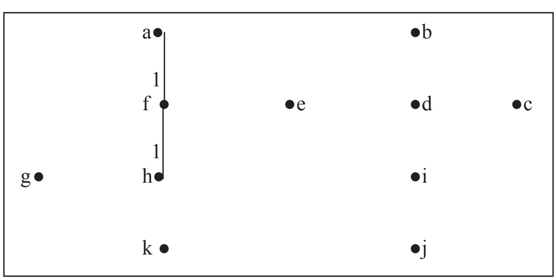
Jawab:

Langkah 1:

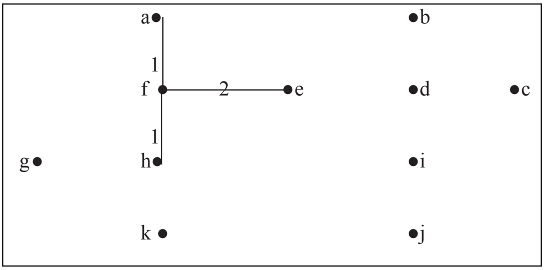


Langkah 2:

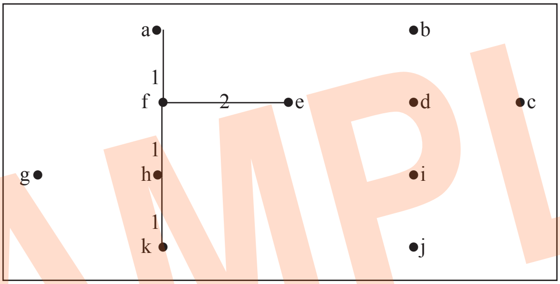
- *Kesatu:*



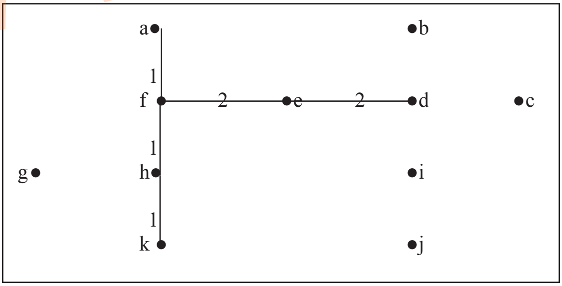
- *Kedua*:



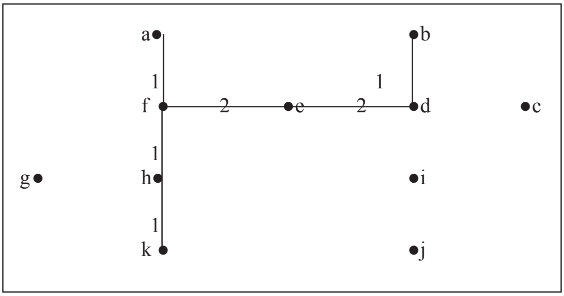
- *Ketiga*:



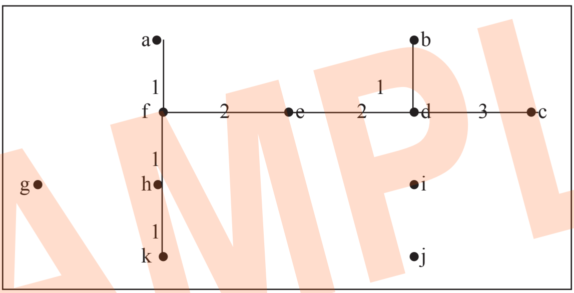
- *Keempat*:



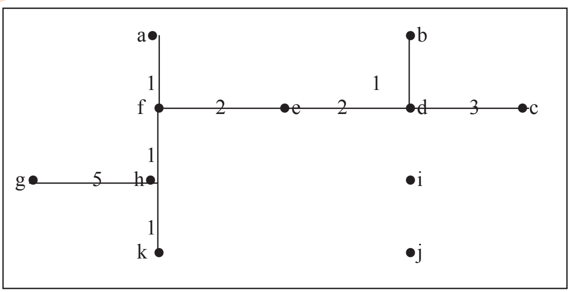
- *Kelima*



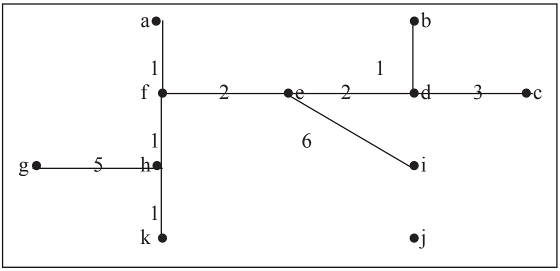
- *Keenam:*



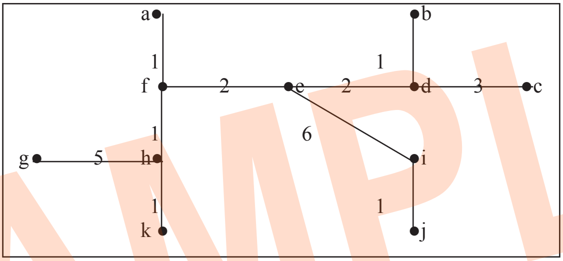
- *Ketujuh*



- *Kedelapan*



- *Kesembilan*



Langkah 3:
Proses ini dilakukan sebanyak 11 – 2 = 9 kali.
Jumlah total bobot minimum yang diperoleh dari pohon merentang tersebut yaitu: 1 + 1 + 1 + 5 + 2 + 2 + 6 + 1 + 1 + 3 = 23

b. Algoritma Kruskal

Algoritma Kruskal merupakan suatu algoritma di dalam teori graf yang digunakan untuk mengonstruksi pohon merentang minimum di di dalam graf berbobot terhubung secara berurutan dari sisi yang berbobot kecil sampai berbobot besar hingga tidak terbentuk cycle. Algoritma Kruskal ditemukan pada tahun 1956 oleh seorang ilmuwan matematika, statistika, komputer dan pisikometrika Joseph yaitu Bernard Kruskal, Jr yang berasal dari Amerika. Algoritma Kruskal dapat diasumsikan dengan memilih sisi dari graf secara berurutan berdasarkan bobotnya dari bobot kecil ke bobot besar. Adapun langkah kerja algoritma kruskal sebagai berikut:

ALGORITMA KRUSKAL

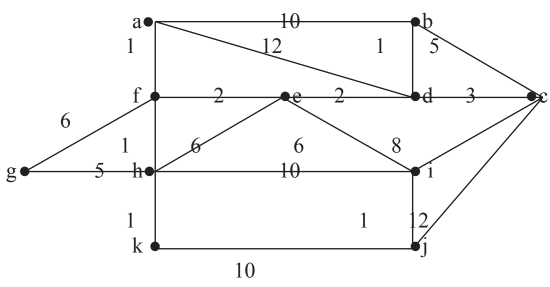
Langkah 1
- Sisi-sisi pada graf diurutkan mulai dari bobot minimum sampai bobot maksimum.
- T masih kosong.

Langkah 2
- Pilih sisi e dengan bobot minimum yang tidak membentuk sirkuit di T.
- Masukkan e ke dalam T.

Langkah 3
- Ulangi langkah 2 sebanyak n-1 kali.

Contoh 5:

Gunakan algoritma Kruskal untuk menentukan pohon merentang minimum dari graf berbobot berikut ini:

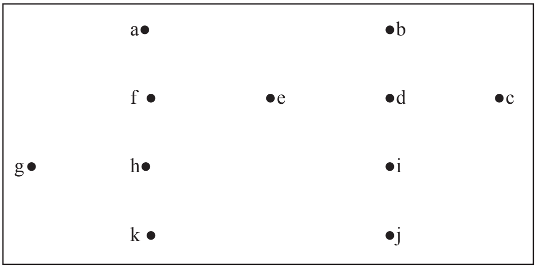


Jawab:

Langkah 1:

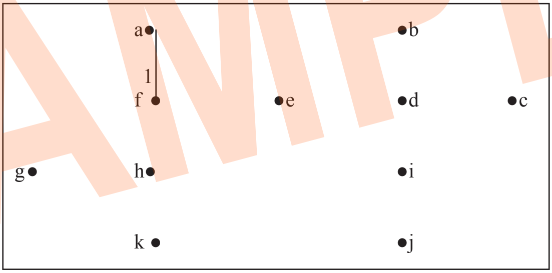
Sisi	(a,f)	(b,d)	(f,h)	(h,k)	(i,j)	(e,f)	(d,e)	(c,d)	(b,c)	(g,h)
Bobot	1	1	1	1	1	2	2	3	5	5

Sisi	(f,g)	(e,h)	(e,i)	(a,b)	(h,i)	(j,k)	(c,j)	(a,d)
Bobot	6	6	6	10	10	10	12	12

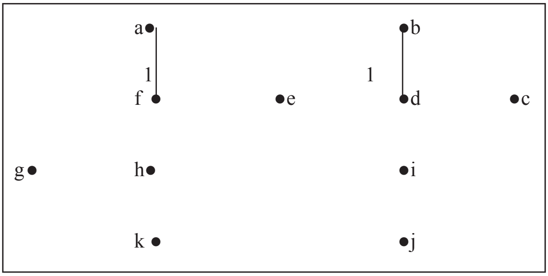


Langkah 2:

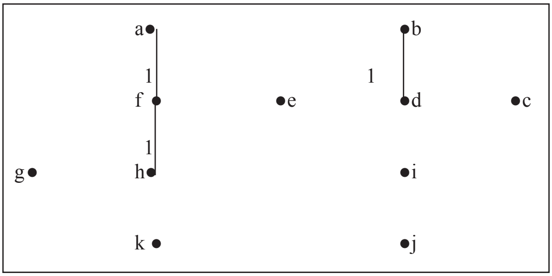
- *Pertama*:



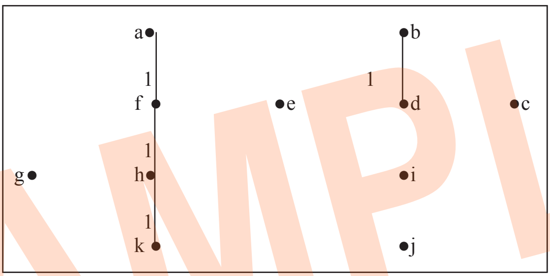
- *Kedua*:



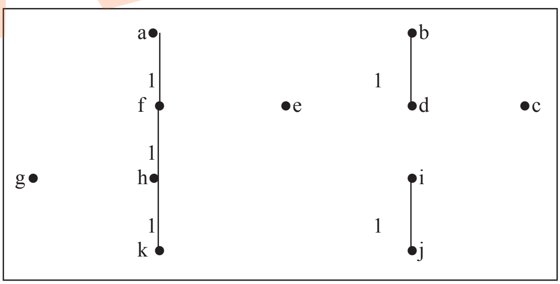
- *Ketiga*:



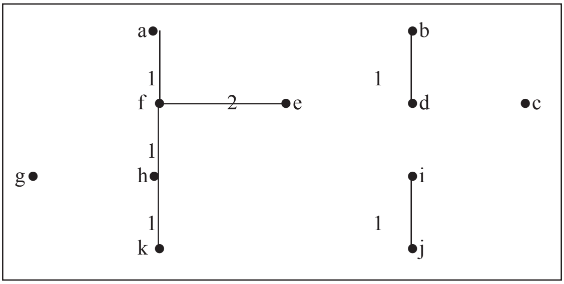
- Keempat:



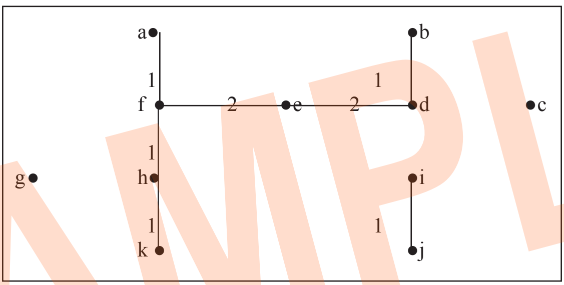
- *Kelima*:



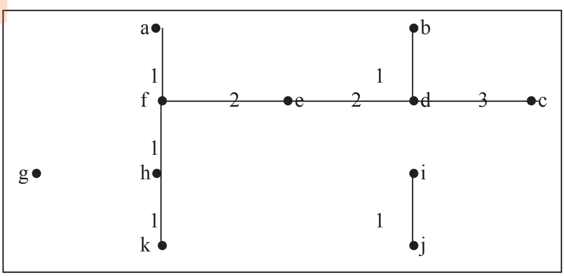
- *Keenam*:



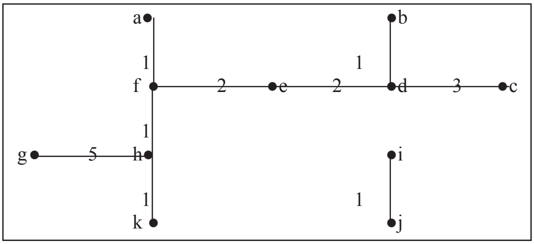
- *Ketujuh*:



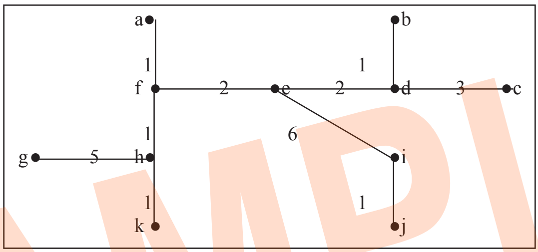
- *Kedelapan*:



- *Kesembilan*:



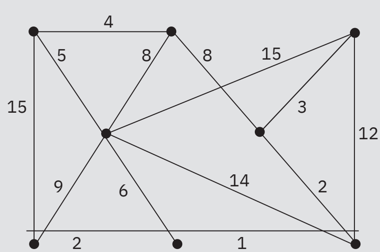
- *Kesepuluh*:



Langkah 3:
Proses ini dilakukan sebanyak 11 – 1 = 10 kali
Jumlah total bobot minimum yang diperoleh dari pohon merentang tersebut: 1 + 1 + 1 + 5 + 2 + 2 + 6 + 1 + 1 + 3 = 23

Latihan Soal

1. Perhatikan graf berikut:

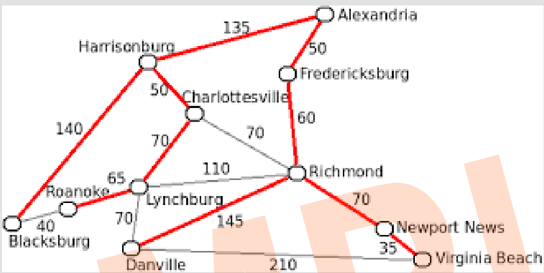


Tentukan:

a. Subgraf yang dihasilkan dari graf G sedemikian hingga membentuk pohon merentang.

b. Jumlah total bobot minimum dari graf G sedemikian hingga membentuk pohon merentang minimum.

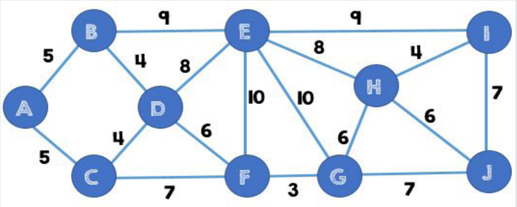
2. Dari denah berikut ini, tentukan total jarak minimum sedemikian hingga membentuk pohon merentang minimum.



3. Gambarkan graf berbobot dari tabel berikut ini, dan tentukan jumlah total jarak minimum sedemikian hingga membentuk pohom merentang minimum.

◇	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Spanning Tree Problem**									
2										
3		Search	**Optimize**			Objective		Feasible		
4			Name	ST1	Dir.	Min	State	TRUE		
5			Search Method		Value	96	Value	0		
6		Greedy	Problem	Span Tr	Algorith	None				
7			To Node	1	2	3	4	5	6	7
8			Name	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
9		Improve	From Node	0	1	1	1	1	1	1
10										
11			Obj. Terms	0	20	18	9	18	18	13
12										
13			C(From,To)	1	2	3	4	5	6	7
14			0	0	0	0	0	0	0	0
15			1	***	20	18	9	18	18	13
16			2	20	***	11	22	8	8	11
17			3	18	11	***	15	3	18	17
18			4	9	22	15	***	17	24	19
19			5	18	8	3	17	***	15	15
20			6	18	8	18	24	15	***	5
21			7	13	11	17	19	15	5	***

4. Tentukan pohon merentang minimum (minimum *spanning tree*) dari graf berbobot berikut dengan menggunakan algoritma Prim dan Kruskal.



5. Gambarkan graf berbobot dari tabel berikut dan tentukan pohon merentang minimum (minimum *spanning tree*) dari graf yang dihasilkan dengan menggunakan algoritma Prim dan Kruskal.

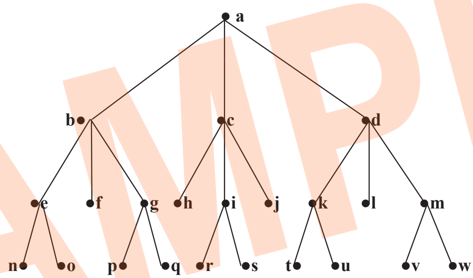
Bobot	Sisi
7	(C,D)
8	(A,C)
9	(A,D)
10	(B,E)
12	(D,G)
13	(G,H)
15	(E,H)
15	(D,E)
14	(A,B)
16	(F,G)
17	(E,G)
20	(F,H)

7.3 POHON BERAKAR (ROOTED TREE)

Definisi 14: Pohon Berakar

Pohon berakar adalah pohon yang sebuah simpulnya diperlakukan sebagai akar yang di dalamnya terdapat unsur-unsur yaitu *child* atau *children* (anak) dan *parent* (orangtua), *path* (lintasan), *descendant* (keturunan) dan *ancestor* (leluhur), *sibling* (saudara kandung), *subtree* (subpohon), *degree* (derajat), *leaf* (daun), *internal nodes* (simpul dalam), *level* (tingkat), *height* (tinggi) atau *depth* (kedalaman).

Contoh 6:

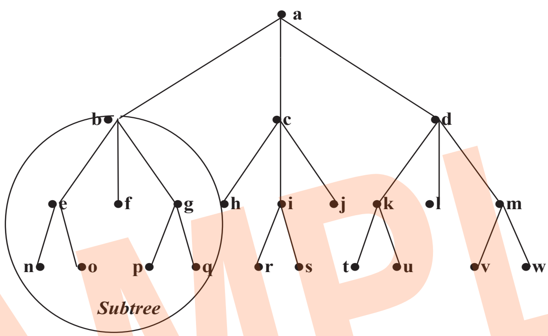


Terminologi yang dapat kita lihat dari gambar pohon berakar (rooted tree) di atas, yaitu:

1. Anak (*children*) terdapat pada simpul b, c, dan d yang merupakan anak dari simpul a sebagai orang tua (*parent*); simpul e, f, g anak dari simpul b; simpul h, i, j anak dari simpul c; simpu k, l, m anak dari simpul d.
2. Lintasan (*path*) dari v_1 ke v_k sedemikian hingga vi adalah orangtua dari vi+1 untuk $1 \leq i < k$. Pada pohon berakar di atas, lintasan dari a ke o adalah a, b, e, o.
3. Keturunan (*descendant*) dan Leluhur (*ancestor*). Misalnya pada pohon berakar tersebut, b adalah leluhur simpul n, dan n adalah keturunan b.

4. Saudara kandung (*sibling*). Misal, simpul e, f, g adalah bersaudara kandung.
5. Subpohon (*subtree*). Misal X adalah simpul di dalam pohon T. Yang dimaksud upapohon, dengan X sebagai akarnya, ialah upagraf T' = (V', E'), sedemikian hingga V' mengandung X dan semua keturunannya dan E' mengandung sisi-sisi dalam semua lintasan yang berasal dari X.

   Contoh:



   Pada gambar subpohon dari pohon berakar di atas, salah satu upapohon (*subtree*) yang terdapat pada pohon berakar tersebut, yaitu:

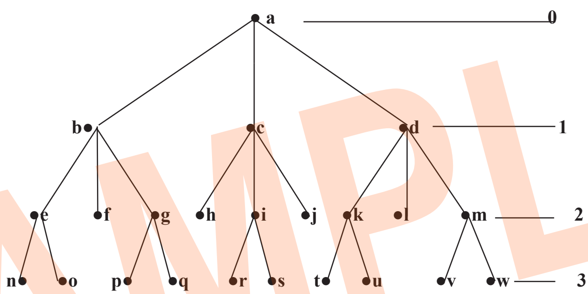
   V' = {b, e, f, g, n, o, p, q}
   E' = {(b,e) (b,f) (b,g) (e,n) (e,o) (g,p) (g,q)}
   b adalah simpul akar
6. Derajat (*degree*) merupakan jumlah anak pada simpul. Misal, simpul a mempunyai derajat 3, simpul e mempunyai derajat 2, simpul n mempunyai derajat 0.
7. Daun (*leaf*) merupakan simpul yang berderajat 0. Pada pohon berakar tersebut yang merupakan daun adalah simpul n, o, f, p, q, h, r, s, j, t, u, l, v, w.
8. Simpul dalam (*Internal nodes*) merupakan simpul yang mempunyai anak. Misal pada gambar subpohon di atas, b, c, dan d merupakan simpul dalam karena masing-masing mempu-

nyai anak. Simpul b mempunyai anak yaitu e, f, dan g. Simpul c mempunyai anak yaitu h, i, dan j. Simpul d mempunyai anak yaitu k, l, dan m.

9. Tingkat (*level*). Akar mempunyai aras = 0, sedangkan aras simpul lainnya = 1 + panjang lintasan dari akar ke simpul tersebut. Pada gambar subpohon di atas, pohon berakar tersebut mempunyai tingkat (level) 3.

   Jika banyaknya simpul = n, maka:

   - Ketinggian minimum adalah H_m = INT(2log n) + 1.
   - Ketinggian maksimum adalah N.



Contoh Gambar Tingkat dari Pohon Berakar (Rooted Tree)

10. Tinggi (*height*) atau kedalaman (*depth*). Aras maksimum suatu pohon disebut tinggi atau kedalaman pohon tersebut. Atau tinggi pohon adalah panjang maksimum lintasan dari akar ke daun.

    Contoh:

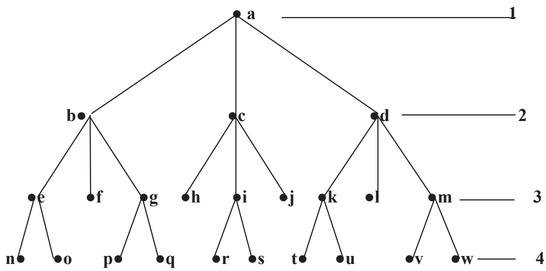
    Dari pohon berakar pada gambar 5 di bawah diperoleh jumlah simpul = 23, maka ketinggian minimumnya sebagai berikut:

    H_m = INT(2log n) + 1

    H_m = INT(2log 2) + 1 = INT (2 x 1,36) + 1

    H_m = INT (3) + 1

    H_m = 3 + 1 = 4

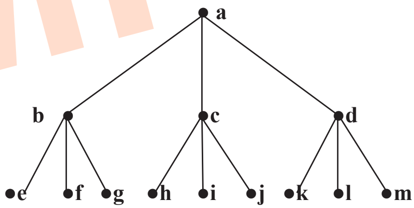


Gambar Tinggi atau Kedalaman dari Pohon Berakar (*Rooted Tree*)

7.4 POHON M-ARY

Definisi 15:
Pohon m-ary penuh merupakan pohon berakar yang setiap simpul cabangnya mempunyai paling banyak n buah anak.

Contoh 7:



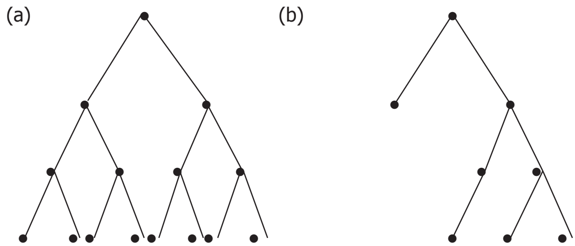
Gambar Pohon 3-ary Penuh

Jumlah daun pada pohon m-ary penuh dengan tinggi h adalah n^h.
Jumlah daun pada pohon 3-ary penuh = $3^2 = 9$.

7.5 POHON BINER

Definisi 16:
Pohon yang setiap simpulnya memiliki paling banyak dua buah anak.

Contoh 8:



Pohon Biner Seimbang **Pohon BinerTidak Seimbang**

7.6 POHON EKSPRESI

Definisi 17:
Pohon Ekspresi (*expression tree*) adalah sebuah pohon biner (*binary tree*) di mana daun menyatakan operand yang terdapat dalam ekspresi aritmatika dan akar (termasuk simpul dalam) menyatakan operator yang terdapat dalam ekspresi aritmatika tersebut.

Operator dalam ekspresi aritmatika dapat dibagi menjadi 2 jenis, yaitu: (1) *binary operator* (operator pasangan), dan (2) *unary operator* (operator tunggal).

Binary operator adalah operator yang memiliki 2 buah operand (diapit oleh 2 buah operand), sedangkan *unary operator* adalah operator yang hanya memiliki 1 buah operand (diikuti oleh sebuah operand).

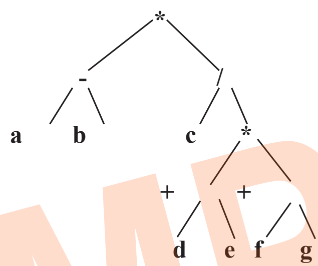
Operator-operator yang termasuk dalam *binary operator* adalah operator penjumlahan (+), pengurangan (-), perkalian (*), pembagian (/), modulo (mod), divisor (div), pemangkatan (^), operator logika *AND*, operator logika *OR*, dan operator perbandingan (seperti operator lebih besar, lebih kecil, sama dengan, lebih besar sama dengan, lebih kecil sama dengan, dan tidak sama dengan).

Operator yang termasuk dalam *unary operator* adalah operator minus (~), operator faktorial (!), operator trigonometri (seperti operator *sinus*, *cosinus*, *tangen*, *cotangen*, *secan*, dan *cosecan*), operator logika *NOT*, operator *exponential* (exp) dan fungsi logaritma (log).

Contoh 9:

Gambarkan pohon ekspresi (a – b) * (c/(d + e) * (f + g)

Jawab:



Notasi/Penulisan Ekspresi Aritmatika

Notasi penulisan ekspresi aritmatika terdiri dari 3 bentuk, yaitu:

1. **Infix**

   Bentuk *infix* merupakan bentuk penulisan normal dari ekspresi aritmatika. Suatu *infix* dapat berupa operand tunggal, atau gabungan dari *unary operator* dengan *infix*, ataupun berupa gabungan dari *binary operator* dengan dua buah *infix*.

   Bentuk *infix* dari ekspresi aritmatika tersebut tidak mengubah bentuk penulisan ekspresi.

   Contoh:

   Tentukan notasi infix dari pohon ekspresi: (a – b) * (c/(d + e) * (f + g)

   Jawab:

   Bentuk *infix*-nya berupa: a – b * c/d + e * f + g

2. **Prefix**

   Bentuk *prefix* merupakan cara/bentuk penulisan ekspresi aritmatika di mana operator ditulis di depan dari operandnya. Suatu *prefix* dapat berupa operand tunggal, atau gabungan dari *unary operator* dengan *prefix*, ataupun berupa gabungan dari *binary operator* dengan dua buah *prefix*.

   Contoh:

   Tentukan notasi prefix dari pohon ekspresi: (a – b) * (c/(d + e) * (f + g)

   Jawab:

   Bentuk pre*fix*-nya berupa: * – ab/c* + de + fg

3. **Postfix**

   Bentuk *postfix* merupakan cara/bentuk penulisan ekspresi aritmatika di mana operator ditulis di belakang dari operandnya. Suatu *suffix* dapat berupa operand tunggal, atau gabungan dari *suffix* dengan *unary operator*, ataupun berupa gabungan dari dua buah *suffix* dengan *binary operator*.

   Contoh 12:

   Tentukan notasi postfix dari pohon ekspresi: (a – b) * (c/(d + e) * (f + g)

   Jawab:

   Bentuk *postfix*-nya berupa: ab + cdefg ++*/

7.7 TRAVERSAL POHON BINER

Definisi 18:
Proses mengunjungi node tepat satu kali dan tiap node hanya boleh memiliki maksimal 2 subtree yang disebut sebagai sub pohon kiri (*left subtree*) dan sub pohon kanan (*right subtree*).

Penelusuran pohon biner biasanya digunakan untuk mencetak informasi yang ada pada simpul itu, atau melakukan perhitungan secara matematik terhadap informasi yang tersimpan dalam simpul tersebut.

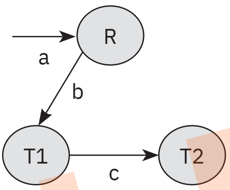
Ada 3 macam penelusuran (*traversal*) pada pohon biner, yaitu:

1. *Traversal pre-order*

   Proses dilakukan sebelum penelusuran dua subpohon (*subtree*), sebagai berikut:

   Gambar 12. Traversal Pre-Order

   a. Kunjungi akar = R
   b. Menelusuri *subtree* kiri dalam *pre-order* = T_1
   c. Menelusuri *subtree* kanan dalam *pre-order* = T_2

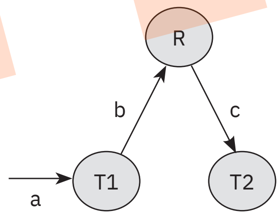


2. *Traversal in-order*

   Proses dilakukan di antara penelusuran dua subpohon (*subtree*), sebagai berikut:

   Gambar 13. Traversal In-Order

   a. Menelusuri *subtree* kiri dalam *in-order* = T_1
   b. Kunjungi akar = R
   c. Menelusuri *subtree* kanan dalam *in-order* = T_2

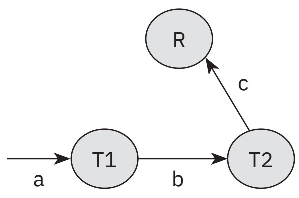


3. *Traversal post-order*

   Proses dilakukan setelah penelusuran dua subpohon (*subtree*):

   Gambar 14. Traversal Post-Order

   a. Menelusuri *subtree* kiri dalam *post-order* =T_1
   b. Menelusuri *subtree* kanan dalam *post-order* = T_2
   c. Kunjungi akar = R

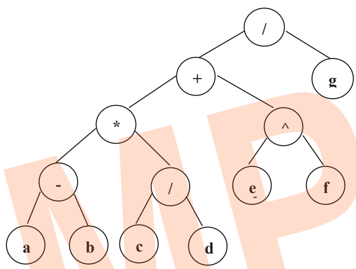


Prinsip kerja penelusuran pada pohon biner sama dengan penulisan ekspresi aritmatika.

- Traversal Pre-Order = Notasi Prefix
- Traversal In-Order = Notasi Infix
- Traversal Post-Order = Notasi Postfix

Contoh 10:

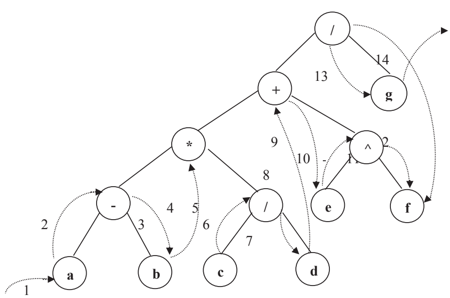
Gambarkan ke dalam penelurusan pohon biner (*traversal* pohon biner) untuk data masukan: (a – b) * (c/d) + (e ^ f) / g



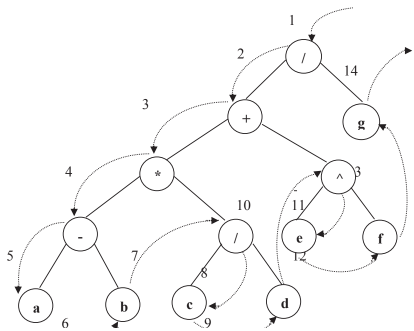
Gambar pohon biner untuk data (a – b) * (c/d) + (e ^ f) / g

Jawab:

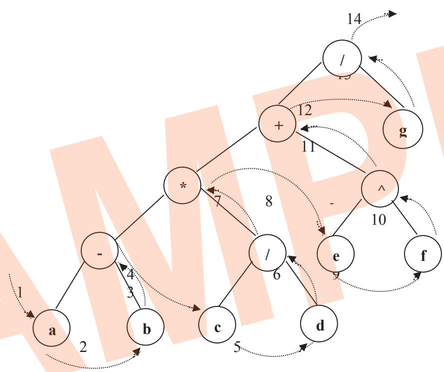
Proses kunjungan dalam pohon biner, setiap simpul hanya dikunjungi tepat satu kali. Hasil dari traversal pohon adalah suatu untai simpul pohon yang diurut secara *linear*.



Gambar traversal in-order pohon biner

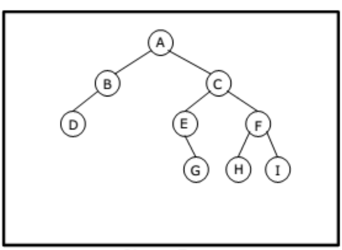


Gambar traversal pre-order pohon biner



Gambar traversal post-order pohon biner

Contoh 11:



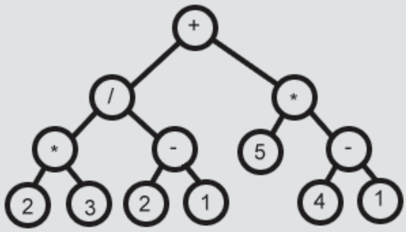
Binary Tree

- Preorder traversal yields:
  A, B, D, C, E, G, F, H, I
- Postorder traversal yields:
  D, B, G, E, H, I, F, C, A
- Inorder traversal yields:
  D, B, A, E, G, C, H, F, I
- Level order traversal yields:
  A, B, C, D, E, F, G, H, I

Pre, Post, Inorder and level order Traversing

Latihan Soal

1. Perhatikan pohon ekspresi berikut:



Expression tree for 2*3/(2-1)+5*(4-1)

   Tentukan notasi *infix*, *prefix*, dan *postfix*!

2. Buat sketsa pohon ekspresi yang merepresentasikan ekspresi:
   a. p/(q– r)*(s + t)
   b. (p+ q)/r– (s + t * u)
   c. ((x-y)*z) – 3)/(19 + (x * x)
3. Tentukan hasil penelusuran dari pohon ekspresi pada soal no. 2 dalam bentuk *pre-order*, *in-order*, dan *post-order*.
4. Buat struktur pohon binar dari notasi *postfix* berikut ini, serta tentukan notasi *prefix* dan *infix*-nya : A + B – C ^D ^ E – F /G * H
5. Ada sebuah binary tree kosong, kemudian di-*insert*-kan: J R D G T E M H P A F Q
   a. Gambarkan *binary tree*-nya.
   b. Tentukan *in-order*, *post-order*, dan *pre-order*-nya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Diestel, Reinhard. 2000. *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag.

Li-Xin Wang, 1997. “A Course In *Fuzzy* Systems And Control International Edition”.

Lipschuts, Seymour & Larslipson Mars. 2002. *Matematika Diskrit Jilid* 2. Jakarta: Schaum’s Salemba Teknika.

Liu. C L. 2005. *Dasar-dasar Matematika Diskrit: Edisi Ketiga*. Bandung: Informatika.

Matai, Rajesh, Surya Prakash S., dan Murari Lal M. 2010. “Traveling Salesman Problem: An Overview of Applications, Formulations, and Solution Approaches”. *Research Gate*, November 2010.

Munir, Rinaldi. 2006. *Matematika Diskrit: Edisi Ketiga*. Bandung: Informatika.

Rosen, Kenneth H. 2007. *Discrete Mathematics and Its Applications: Sixth Edition*. New York: Mc Graw-Hill Book Company.

Siang, Jong Jek, M.Sc. 2006. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Penerbit Andi.

Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Toth, Paolo & Daniel Vigo. 2002. *The Vehicle Routing Problem*. Bologna: Siam

Wilson, Robin J. 1996. *Introduction to Graph Theory*. London: British Library.

CURRICULUM VITAE

Dr. Almira Amir, M.Si., Penulis kelahiran Medan tahun 1973 adalah dosen di program studi S-1 Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan IAIN Padangsidimpuan, dosen program S-2 Tadris Matematika dan tutor UBJJ UT Medan sejak 2010 sampai sekarang dan aktif melakukan penelitian sejak tahun 2014. Penulis menyelesaikan pendidikan S-1 di UMSU dan S-2 sampai S-3 (Ilmu Matematika) di USU Medan. Penulis dapat dihubungi melalui email: almiraamir70@gmail.com